第６章　微分法の応用

第１節　導関数の応用

１　接線の方程式

$\boxed{1}$ **接線の方程式，法線の方程式**

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$f'(a)\neq 0$ のとき　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$，$f'(a)=0$ のとき　$x=a$

２　平均値の定理

$\boxed{1}$ **平均値の定理**

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

注　平均値の定理は，次のロルの定理を一般化したもので，曲線 $y=f(x)$ において，その上の２点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を結ぶ線分に平行な接線が引けるような点 C が，曲線上で，A と B の間にあることを意味している。

参考　**ロルの定理**（平均値の定理の特別な場合）

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能で，$f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$，$a<c<b$　を満たす実数 c が存在する。

３　関数の値の変化

$\boxed{1}$ **関数の増減**　関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする。

１　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で増加する。

２　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で減少する。

３　区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で定数である。

$\boxed{2}$ **関数の極大と極小**

１　連続な関数 $f(x)$ が，$x=a$ を境目として，増加から減少に移るとき

　　$f(x)$ は $x=a$ で極大で，極大値は $f(a)$

　連続な関数 $f(x)$ が，$x=b$ を境目として，減少から増加に移るとき

　　$f(x)$ は $x=b$ で極小で，極小値は $f(b)$

２　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき

　　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば　　$f'(a)=0$

　注　$f'(a)=0$ であっても，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとは限らない。

$\boxed{3}$ **関数の最大と最小**

区間 $[a,\ b]$ において連続な関数 $f(x)$ の最大値，最小値は，$f(x)$ の極値と区間の両端における関数の値 $f(a)$，$f(b)$ との大小を調べて決定する。

４　関数のグラフ

$\boxed{1}$ **曲線の凹凸**　関数 $f(x)$ が第２次導関数 $f''(x)$ をもつとする。

１　曲線 $y=f(x)$ は　　$f''(x)>0$ である区間では，下に凸

　　　　　　　　　　　$f''(x)<0$ である区間では，上に凸

２　$f''(a)=0$ のとき，$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点である。

３　点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば　$f''(a)=0$

$\boxed{2}$ **グラフの概形**

グラフの概形をかくには，次のことに注意する。

- 定義域を調べる。曲線の存在範囲，不連続点を調べる。
- 対称性を調べる。
- 関数の値の増加や減少，極大や極小を調べる。
- 曲線の凹凸，変曲点を調べる。
- 曲線が漸近線をもつかどうかを調べる。
- 座標軸との共有点など，容易にわかる曲線上の点を求める。

漸近線の求め方　関数 $y=f(x)$ のグラフ（曲線）について

１　**y 軸に垂直な漸近線**　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=a$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$ が成り立つとき，直線 $y=a$ は漸近線である。

２　**x 軸に垂直な漸近線**　$\displaystyle\lim_{x\to c+0}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to c-0}f(x)$ のうち少なくとも１つが ∞ または $-\infty$ であるとき，直線 $x=c$ は漸近線である。

３　**x 軸に垂直でない漸近線**　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ であるとき，直線 $y=ax+b$ は漸近線である。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b$ ならば，直線 $y=ax+b$ は漸近線である。

$\boxed{3}$ **第２次導関数と極値**　$f''(x)$ が連続関数であるとする。

１　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$　ならば　$f(a)$ は極小値

２　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$　ならば　$f(a)$ は極大値

第２節　いろいろな応用

５　方程式，不等式への応用

$\boxed{1}$ **不等式の証明**

不等式 $f(x)>g(x)$ を証明するには，$y=f(x)-g(x)$ の値の変化を調べる。

- $y=F(x)$ とする。$x\geqq a$ で $F'(x)>0$ かつ $F(a)\geqq 0$ ならば，$x\geqq a$ で $F(x)\geqq 0$
- $y=f(x)-g(x)$ の最小値を求めて，(最小値)>0 を示す。

$\boxed{2}$ **方程式の実数解の個数**

方程式 $f(x)=a$（a は定数）の異なる実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

$\boxed{3}$ **e^x と x^n に関する極限**

自然数 n に対して，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

６　速度と加速度

$\boxed{1}$ **直線上の点の運動**

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標 x が $x=f(t)$ で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，加速度 α は

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad \alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

$\boxed{2}$ **平面上の点の運動**

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標 が t の関数であるとき，時刻 t における P の速度 $\vec{v}$，加速度 $\vec{\alpha}$ は

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\quad \vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

また，速さ（速度の大きさ）$|\vec{v}|$，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},\quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

$\boxed{3}$ **等速円運動**

$r>0$，$\omega>0$ とする。座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t$$

で表されるとき，P は原点 O を中心とする半径 r の円周上を一定の速さ ωt で動く。このような運動を等速円運動といい，ω をその角速度という。

７　近似式

$\boxed{1}$ **１次の近似式**

１　$h\fallingdotseq 0$ のとき　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

２　$x\fallingdotseq 0$ のとき　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$