第２章　式と曲線

第１節　２次曲線

１　放物線

□1 **放物線の方程式**

x 軸を軸とする放物線の標準形　$y^2=4px$（$p \neq 0$）

１　焦点は点 $(p,\ 0)$，準線は直線 $x=-p$

２　軸は x 軸，頂点は原点 O

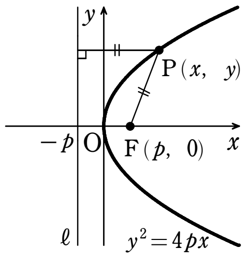
３　曲線は x 軸に関して対称

y 軸を軸とする放物線の標準形　$x^2=4py$（$p \neq 0$）

１　焦点は点 $(0,\ p)$，準線は直線 $y=-p$

２　軸は y 軸，頂点は原点 O

３　曲線は y 軸に関して対称



２　楕円

□1 **楕円の方程式**

楕円の標準形　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$

$a>b>0$ のとき

１　焦点は　２点 $\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$

２　楕円上の点から２つの焦点までの距離の和は　$2a$

３　長軸の長さは $2a$，短軸の長さは $2b$

４　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

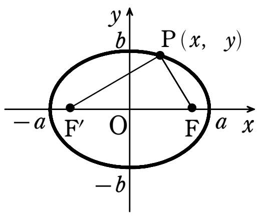
$b>a>0$ のとき

１　焦点は　２点 $\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$

２　楕円上の点から２つの焦点までの距離の和は　$2b$

３　長軸の長さは $2b$，短軸の長さは $2a$

４　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称



３　双曲線

□1 **双曲線の方程式**

双曲線の標準形

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **または** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　$(a>0,\ b>0)$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のとき

１　焦点は　２点 $\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，
　　頂点は　２点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$

２　双曲線上の点から２つの焦点までの距離の差は
　　$2a$

３　漸近線は　２直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

４　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

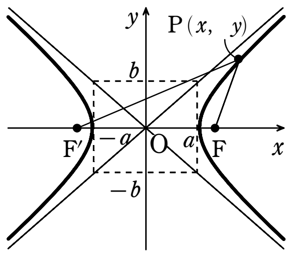
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ のとき

１　焦点は　２点 $\left(0,\ \sqrt{a^2+b^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{a^2+b^2}\right)$，
　　頂点は　２点 $(0,\ b)$，$(0,\ -b)$

２　双曲線上の点から２つの焦点までの距離の差は　$2b$

３　漸近線は　２直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

４　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称



４　２次曲線の平行移動

□1 **曲線の平行移動**

曲線 $F(x,\ y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の曲線の方程式は　　$F(x-p,\ y-q)=0$

□2 **曲線の対称移動**

曲線 $F(x,\ y)=0$ を，次の直線または点に関して対称移動するとき，移動後の曲線の方程式は

x 軸：$F(x,\ -y)=0$　　y 軸：$F(-x,\ y)=0$　　原点：$F(-x,\ -y)=0$

直線 $y=x$：$F(y,\ x)=0$

５　２次曲線と直線　$\boxed{\text{研究}}$　２次曲線の接線の方程式

□1 **２次曲線と直線の共有点**

１　**共有点の座標**　２次曲線と直線の方程式を連立させた方程式の実数解

２　**位置関係**　２次曲線と直線の方程式から１文字を消去して得られる２次方程式の判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 異なる２点で交わる　（共有点２個）

$D=0 \iff$ 接する　（共有点１個）

$D<0 \iff$ 共有点をもたない　（共有点０個）

注　双曲線とその漸近線に平行な直線，放物線とその軸に平行な直線の場合，方程式から１文字を消去すると１次方程式になることがある。そのときは１点で交わる。なお，双曲線とその漸近線は共有点をもたない。

□2 **２次曲線の接線の方程式**

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$y_1y=2p(x+x_1)$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

６　２次曲線の性質

□1 **焦点，準線，離心率**

定点 F と，F を通らない定直線 ℓ があり，平面上の点 P から ℓ に下ろした垂線を PH とする。PF：PH$=e$：1（一定）であるとき，点 P の軌跡は次のようになる。

$0<e<1$ のとき　楕円　　$e=1$ のとき　放物線　　$e>1$ のとき　双曲線

（F：焦点，　ℓ：焦点 F に対する準線，　e：離心率）

第２節　媒介変数表示と極座標

７　曲線の媒介変数表示

□1 **一般角 θ を用いた媒介変数表示**

１　円 $x^2+y^2=a^2$　$\longrightarrow$　$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$

２　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$\longrightarrow$　$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$

３　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$\longrightarrow$　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=b\tan\theta$

　　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　$\longrightarrow$　$x=a\tan\theta$，$y=\dfrac{b}{\cos\theta}$

４　サイクロイド　$\longrightarrow$　$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$

□2 **媒介変数表示される曲線の平行移動**

媒介変数表示 $x=f(t)+p$，$y=g(t)+q$ で表される曲線は，媒介変数表示 $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される曲線を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

８　極座標と極方程式

□1 **極座標と直交座標**

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，次の関係が成り立つ。

１　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

２　$r=\sqrt{x^2+y^2}$，　$r \neq 0$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

□2 **極方程式**

円　極を中心とする半径 a の円　$\longrightarrow$　$r=a$

　　中心の極座標が $(a,\ 0)$ である半径 a の円　$\longrightarrow$　$r=2a\cos\theta$

直線　極座標が $(a,\ 0)$ である点を通り始線に垂直な直線　$\longrightarrow$　$r=\dfrac{a}{\cos\theta}$

　　極を通り，始線と α の角をなす直線　$\longrightarrow$　$\theta=\alpha$

注　$r<0$ のとき，$(r,\ \theta)$ は極座標が $(|r|,\ \theta+\pi)$ である点を表すものとする。