

第 4 章 極限

第 1 節 数列の極限

1 数列の極限

① 数列  $\{a_n\}$  の極限

収束	値 $\alpha$ に収束	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$	……	極限は $\alpha$
発散(収束しない)	正の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$	……	極限は $\infty$
	負の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$	……	極限は $-\infty$
	振動		……	極限は ない

② 数列の極限の性質

数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  がともに収束して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とする。

- $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha$       ただし、 $k$  は定数
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$       ただし、 $\beta \neq 0$

③ 数列の極限と大小関係

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とする。

- すべての  $n$  について  $a_n \leq b_n$  ならば  $\alpha \leq \beta$
- すべての  $n$  について  $a_n \leq c_n \leq b_n$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$

④  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  のとき、すべての  $n$  について  $a_n \leq b_n$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

⑤ 性質 6 を「はさみうちの原理」ということがある。

④ 数列の極限の計算

$\frac{\infty}{\infty}$       分数式では分母の最高次の項で分母、分子を割る。  
 $\infty - \infty$     多項式ではくくり出し、無理式では有理化を考える。  
極限が直接求めにくい場合は、不等式を利用する (上の 5, 6 などを利用)

2 無限等比数列

① 数列  $\{r^n\}$  の極限

- |               |  |        |
|---------------|--|--------|
| $r > 1$ のとき   | $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ | } 収束する |
| $r = 1$ のとき   | $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$      |        |
| $ r  < 1$ のとき | $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$      |        |
- $r \leq -1$  のとき    振動する    ……    極限はない

数列  $\{r^n\}$  が収束するための必要十分条件は  $-1 < r \leq 1$

3 無限級数

① 無限級数

無限級数の和    第  $n$  項までの部分 and  $S_n$  を求めて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を計算する。

② 無限等比級数の収束、発散

無限等比級数  $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$  について

- $a \neq 0$  のとき     $|r| < 1$  ならば収束し、その和は  $\frac{a}{1-r}$  である。
- $|r| \geq 1$  ならば発散する。
- $a = 0$  のとき    収束し、その和は 0 である。

③ 無限級数の性質

無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  がともに収束して、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$  とする。

- $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k S$       ただし、 $k$  は定数
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$

④ 無限級数の収束・発散と項の極限

- 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が収束する  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- 数列  $\{a_n\}$  が 0 に収束しない  $\implies$  無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は発散する

⑤ 2 は 1 の対偶である。1, 2 の逆は成り立たない。

第 2 節 関数の極限

4 関数の極限 (1)      5 関数の極限 (2)

① 関数の極限

関数  $f(x)$  において、 $x$  が  $a$  と異なる値をとりながら  $a$  に限りなく近づくとき、

- [1]  $f(x)$  の値が一定の値  $\alpha$  に限りなく近づくならば
- $$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha$$

と書き表す。

- [2]  $f(x)$  の値が限りなく大きくなるならば
- $$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \infty$$

と書き表す。

- [3]  $f(x)$  の値が負で、その絶対値が限りなく大きくなるならば
- $$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow -\infty$$

と書き表す。

- [4] [1]～[3] のいずれでもない場合、 $x \longrightarrow a$  のとき  $f(x)$  の極限はない。

⑥  $x \longrightarrow \infty$ ,  $x \longrightarrow -\infty$  のときの極限も同様に考える。

② 関数の極限の性質

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  とする。

- $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \alpha$       ただし、 $k$  は定数
- $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$       ただし  $\beta \neq 0$

⑦ 1～4 は  $x \longrightarrow \infty$ ,  $x \longrightarrow -\infty$  の場合にも成り立つ。

③ 片側からの極限

- 右側極限     $x > a$  の範囲で  $x \longrightarrow a$  のときの  $f(x)$  の極限  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$   
左側極限     $x < a$  の範囲で  $x \longrightarrow a$  のときの  $f(x)$  の極限  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$   
 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  と  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  がともに存在しても、それらが一致しないとき、  
 $x \longrightarrow a$  のとき  $f(x)$  の極限はない。

④ 関数の極限の計算

$\frac{\infty}{\infty}$       分数式では分母の最高次の項で分母、分子を割る。  
 $\infty - \infty$     多項式ではくくり出し、無理式では有理化を考える。  
 $\frac{0}{0}$       分数式では約分、無理式では有理化を考える。  
 $\infty \times 0$      $\frac{\infty}{\infty}$  または  $\frac{0}{0}$  と同様に考える。

6 三角関数と極限

① 関数の極限と大小関係

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  とする。

- $x = a$  の近くで常に  $f(x) \leq g(x)$  ならば  $\alpha \leq \beta$
- $x = a$  の近くで常に  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  かつ  $\alpha = \beta$  ならば  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$

⑧ 性質 5, 6 は「 $x = a$  の近くで」を「十分大きい  $x$  で」と読みかえると、  
 $x \longrightarrow \infty$  のときにも成り立つ。同様に、 $x \longrightarrow -\infty$  のときにも成り立つ。

⑨ 性質 6 を「はさみうちの原理」ということがある。

⑩  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  のとき、十分大きい  $x$  で常に  $f(x) \leq g(x)$  ならば  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

② 三角関数の極限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$     (角の単位はラジアン)

7 関数の連続性

1 関数の連続性

- 1 関数  $f(x)$  において、その定義域内の  $x$  の値  $a$  に対して、極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  が存在し、かつ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  が成り立つとき、 $f(x)$  は  $x = a$  で **連続** であるという。
- 関数  $f(x)$  が  $x = a$  で連続でないとき、 $f(x)$  は  $x = a$  で **不連続** であるという。
- 2 関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  がともに  $x = a$  で連続ならば、次の関数はいずれも  $x = a$  で連続である。

$$kf(x) \quad (k \text{ は定数}), \quad f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x)g(x),$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(a) \neq 0)$$

2 ガウス記号 [ ]

$[x] = (\text{\textit{x} を超えない最大の整数})$       ただし、 $x$  は実数

3 中間値の定理

関数  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続で、 $f(a) \neq f(b)$  ならば、 $f(a)$  と  $f(b)$  の間の任意の値  $k$  に対して  $f(c) = k$ 、 $a < c < b$  を満たす実数  $c$  が少なくとも1つある。

注 とくに、 $f(a)$  と  $f(b)$  の符号が異なれば、方程式  $f(x) = 0$  は  $a < x < b$  の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。