第７章　積分法とその応用

第１節　不定積分

１　不定積分とその基本性質

1　不定積分　積分定数を C とする。

$F'(x)=f(x)$ のとき，$f(x)$ の不定積分は　$\int f(x)dx=F(x)+C$

x^α の不定積分　(α は実数)

$$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad \text{ただし，}\alpha \fallingdotseq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

2　不定積分の基本性質

1　$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$　　ただし，k は定数

2　$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3　$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

3　三角関数，指数関数の不定積分　積分定数を C とする。

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$$

２　置換積分法と部分積分法

1　置換積分法　積分定数を C とする。

$F'(x)=f(x)$，$a\fallingdotseq 0$ とするとき　$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

1　$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$　　ただし，$x=g(t)$

2　$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$　　ただし，$g(x)=u$

3　$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

2　部分積分法

4　$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

　とくに　$\int f(x)dx=xf(x)-\int xf'(x)dx$

３　いろいろな関数の不定積分

1　分数関数の不定積分

- 分子の次数が分母の次数より低くなるように変形する。
- 部分分数に分解する。

2　三角関数の不定積分

- 三角関数の公式（2 倍角の公式，半角の公式，和と積の公式など）で変形する。

和と積の公式　$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

- $f(\sin x)\cos x$，$f(\cos x)\sin x$，$f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}$ の形に変形する。(置換積分法)

第２節　定積分

４　定積分とその基本性質

1　定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，a，b をその区間に含まれる任意の値とするとき

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

2　定積分の基本性質

1　$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　　ただし，k は定数

2　$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3　$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

4　$\int_a^a f(x)dx=0$

5　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

6　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

５　置換積分法と部分積分法

1　定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

よく用いられるおき換え

$f(ax+b)$　$\longrightarrow$　$ax+b=t$

$\{f(x)\}^\alpha f'(x)$，$\frac{f'(x)}{f(x)}$　$\longrightarrow$　$f(x)=t$

$\sqrt{a^2-x^2}$　$(a>0)$　$\longrightarrow$　$x=a\sin\theta$ または $x=a\cos\theta$

$\frac{1}{x^2+a^2}$　$(a>0)$　$\longrightarrow$　$x=a\tan\theta$

2　偶関数と奇関数の定積分

$f(-x)=f(x)$ を満たす関数を **偶関数**，$f(-x)=-f(x)$ を満たす関数を **奇関数** という。

1　偶関数 $f(x)$ について　$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

2　奇関数 $f(x)$ について　$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

3　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_a^b-\int_a^b xf'(x)dx$$

６　定積分のいろいろな問題

1　定積分と導関数

a が定数のとき　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

2　区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\varDelta x=\int_a^b f(x)dx \quad \text{ただし，}\varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x$$

とくに　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

3　定積分と不等号

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$f(x)\geqq g(x)$ ならば　$\int_a^b f(x)dx\geqq\int_a^b g(x)dx$

等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときに成り立つ。

第３節　積分法の応用

７　面積

1　曲線 $y=f(x)$ と面積

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b f(x)dx$

2　２曲線間の面積

区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

3　曲線 $x=g(y)$ と面積

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および２直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_c^d g(y)dx$

4　媒介変数表示と面積

y は x の関数とする。曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ で囲まれた部分の面積 S は，$a=f(\alpha)$，$b=f(\beta)$ で常に $y \geqq 0$ ならば

$$S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$$

８　体積

1　定積分と体積

区間 $[a,\ b]$ において，x 軸に垂直な平面による切り口の面積が $S(x)$ であるような立体の体積 V は　$V=\int_a^b S(x)dx$

2　回転体の体積

１　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx=\pi\int_a^b y^2dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

２　曲線 $x=g(y)$ と y 軸および２直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2dy=\pi\int_c^d x^2dy \qquad \text{ただし，} c<d$$

９　道のり

1　速度と位置

数直線上を運動する点Ｐの時刻 t における座標を $x=f(t)$，速度を v とすると

Ｐの $t=t_1$ から $t=t_2$ までの 位置の変化量は　$f(t_2)-f(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} vdt$

時刻 $t=t_2$ におけるＰの座標は　$x=f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} vdt$

2　道のり

数直線上を運動する点Ｐの時刻 t における速度を v とすると，時刻 t_1 から t_2 までにＰが通過する道のり s は　$s=\int_{t_1}^{t_2} |v|dt$

座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標を $(x,\ y)$，速度を $\vec{v}$ とすると，時刻 t_1 から t_2 までにＰが通過する道のり s は

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|dt$$

１０　曲線の長さ

1　媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

2　曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は　$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$