## 第５章　微分法

### 第１節　導関数

**１　微分係数と導関数　　２　導関数の計算**

**1　微分係数と導関数**

１　関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

２　関数 $f(x)$ の導関数　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

**2　微分可能と連続**

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$x=a$ で連続である。

注　関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても，$x=a$ で微分可能であるとは限らない。

**3　導関数の公式**

関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ がいずれも微分可能であるとき

１　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　　ただし，$k$ は定数

２　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

３　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

４　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

５　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

６　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

**$x^p$ の導関数**　$p$ が有理数のとき　$(x^p)'=px^{p-1}$

**4　合成関数の微分法**

１　微分可能な２つの関数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ について　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

注　$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$ のように書き表すこともできる。

２　$a$，$b$ は定数，$p$ は有理数とする。関数 $f(x)$ が微分可能であるとき

$$\frac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b),\quad \frac{d}{dx}\{f(x)\}^p=p\{f(x)\}^{p-1}f'(x)$$

**5　逆関数の微分法**　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

### 第２節　いろいろな関数の導関数

**３　いろいろな関数の導関数**

**1　三角関数の導関数，対数関数の導関数，指数関数の導関数**

$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$　　$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$(e^x)'=e^x$　　$(a^x)'=a^x\log a$

**自然対数の底 $e$ の定義**　$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=2.71828\cdots\cdots$

注　微分法や積分法では，$e$ を底とする対数，すなわち自然対数のときに，底 $e$ を省略して，単に $\log x$ と書くことが多い。

**2　$x^\alpha$ の導関数**

$\alpha$ が実数のとき　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

**3　対数微分法**

１　関数 $y=f(x)$ について，両辺の絶対値の自然対数をとり，両辺を $x$ で微分して，導関数を求める方法を対数微分法という。

２　積・商・指数・累乗の形の関数を微分するとき，対数微分法を使うと，計算が簡単になる場合がある。

**４　第 $n$ 次導関数　　５　曲線の方程式と導関数**

**1　第 $n$ 次導関数**

関数 $y=f(x)$ について

**第２次導関数**とは，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を微分した関数で

$y''$，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などの記号で表す。

**第 $n$ 次導関数**とは，$f(x)$ を $n$ 回微分して得られる関数で

$y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\dfrac{d^ny}{dx^n}$，$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などの記号で表す。

**2　曲線の方程式と導関数**

方程式 $F(x,\ y)=0$ で表される関数（陰関数）の導関数は，（合成関数の微分法により）

$\dfrac{d}{dx}f(y)=\dfrac{d}{dy}f(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$ を用いて，両辺を $x$ で微分する。

**3　媒介変数表示と導関数**

$x=f(t)$，$y=g(t)$（$t$ は媒介変数）のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$