生徒が興味・関心をもった不等式の問題
～学園ドラマの中の板書にあった問題～

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

ある若い先生から，生徒が学園ドラマの板書の中にあった不等式の問題を質問に来たので考えて欲しいと言われた。それは「不等式 $4^x-2\cdot3^x+2\leqq0$ を解け。」という問題であった。「問題がちょっと変ですね～，生徒の記憶違いかもしれません…。」というコメントを残して，その先生は次の授業に向かった。確かによくある問題は「不等式 $4^x-2\cdot2^x+2\leqq0$ を解け。」や「不等式 $9^x-2\cdot3^x+2\leqq0$ を解け。」であるが，前者では $4^x-2\cdot2^x+2=(2^x)^2-2\cdot2^x+2=(2^x-1)^2+1>0$ であるから解はない。後者でも同様である。そこでこの問題が適当に板書された問題でもなく，また生徒の記憶違いでもないとして取り組んでみた。

§2. 不等式 $4^x-2\cdot3^x+2\leqq0$ を解く～数学Ⅲの範囲で～

$f(x)=4^x-2\cdot3^x+2$ とおくと，

$f(1)=4^1-2\cdot3^1+2=4-6+2=0$,

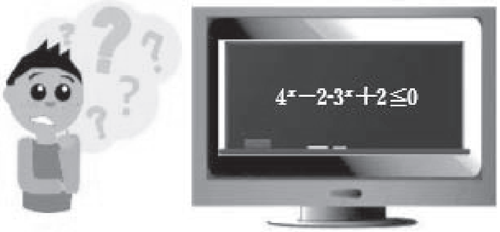
$f(2)=4^2-2\cdot3^2+2=16-18+2=0$ である。ここで，$x=1,\ 2$ が解の端点に関わりそうであることがわかる。$1\leqq x\leqq2$ の中の $x=\dfrac{3}{2}$ で $f(x)$ の符号を確認してみる。

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3}{2}\right)&=4^{\frac{3}{2}}-2\cdot3^{\frac{3}{2}}+2=(2^2)^{\frac{3}{2}}-2\cdot3\cdot3^{\frac{1}{2}}+2\\&=2^3-6\sqrt{3}+2=10-6\sqrt{3}\\&=6\left(\frac{5}{3}-\sqrt{3}\right)<0\quad(\because\ \sqrt{3}=1.732\cdots)\end{aligned}$$

すると，これよりこの不等式の解は $1\leqq x\leqq2$ ではなかろうかという予想が立つ。

それを示すには，$x\leqq1,\ 2\leqq x$ では $f(x)\geqq0$, $1\leqq x\leqq2$ では $f(x)\leqq0$ であることを示せばよいが，そのための１つの方法には「$1<\alpha<2$ である α に対して，$f(x)$ は $x\leqq\alpha$ において減少し，$x\geqq\alpha$ において増加する」つまり「$1<\alpha<2$ である α に対して，$x<\alpha$ では $f'(x)<0$, $x>\alpha$ では $f'(x)>0$ である」ことを示せばよいことに気付く。

では，この α とはどういう値であろうか。



$f(x)=4^x-2\cdot3^x+2$ を微分して

$$\begin{aligned}f'(x)&=4^x\log4-2\cdot3^x\log3\\&=2\cdot4^x\log2-2\cdot3^x\log3\\&=2\log2\cdot3^x\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^x-\frac{\log3}{\log2}\right\}\end{aligned}$$

ここで，$f'(x)=0$ を解く。$2\log2\cdot3^x\neq0$ であるから

$\left(\dfrac{4}{3}\right)^x-\dfrac{\log3}{\log2}=0$　よって，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^x=\dfrac{\log3}{\log2}$

つまり　$x\log\dfrac{4}{3}=\log\left(\dfrac{\log3}{\log2}\right)$

よって　$x=\dfrac{\log\left(\dfrac{\log3}{\log2}\right)}{\log\dfrac{4}{3}}$

これを α とおく。つまり　$\alpha=\dfrac{\log\left(\dfrac{\log3}{\log2}\right)}{\log\dfrac{4}{3}}$ とおき，

$1<\alpha<2$ であることを示せばよい。

そのために，まず $\dfrac{4}{3}<\dfrac{\log3}{\log2}<\dfrac{16}{9}$ であることを示しておこう。

$$\frac{4}{3}<\frac{\log 3}{\log 2}<\frac{16}{9} \iff 4\log 2<3\log 3 \text{ かつ } 9\log 3<16\log 2$$
$$\iff \log 2^4<\log 3^3 \text{ かつ } \log 3^9<\log 2^{16}$$
$$\iff 2^4<3^3 \text{ かつ } 3^9<2^{16}$$

$2^4=16$，$3^3=27$ であるから $2^4<3^3$

$3^3=27$，$2^5=32$ であるから $3^3<2^5$

よって　$(3^3)^3<(2^5)^3$　　したがって　$3^9<2^{15}<2^{16}$

これより　$\dfrac{4}{3}<\dfrac{\log 3}{\log 2}<\dfrac{16}{9}$ であるから

$$\log\frac{4}{3}<\log\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)<\log\frac{16}{9}=\log\left(\frac{4}{3}\right)^2=2\log\frac{4}{3}$$

$\log\dfrac{4}{3}>0$ であるから　$1<\dfrac{\log\left(\dfrac{\log 3}{\log 2}\right)}{\log\dfrac{4}{3}}<2$

つまり　$1<\alpha<2$ である。(図 1)

$f'(x)=2\log 2\cdot 3^x\left\{\left(\dfrac{4}{3}\right)^x-\dfrac{\log 3}{\log 2}\right\}$ において，

- $2\log 2\cdot 3^x>0$
- 指数関数 $y=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$ は単調増加　$\left(\because\ \text{底}\ \dfrac{4}{3}>1\right)$
- $f'(\alpha)=0$ $(1<\alpha<2)$

であるから，$f(x)=4^x-2\cdot 3^x+2$ は，$x<\alpha$ では $f'(x)<0$，$x>\alpha$ では $f'(x)>0$ である。

つまり，$1<\alpha<2$ である α に対して，$f(x)$ は $x\leqq\alpha$ において減少，$f(x)$ は $x\geqq\alpha$ において増加

また，$f(1)=f(2)=0$ であるから，$x\leqq 1$，$2\leqq x$ では $f(x)\geqq 0$，$1\leqq x\leqq 2$ では $f(x)\leqq 0$

したがって，$f(x)\leqq 0$　つまり　$4^x-2\cdot 3^x+2\leqq 0$ の解は，$1\leqq x\leqq 2$ である。■

なお，$y=4^x-2\cdot 3^x+2$ のグラフは図 2 のようになる。グラフから $f(x)\leqq 0$ となるのは $1\leqq x\leqq 2$ のときであることが視覚的にわかる。

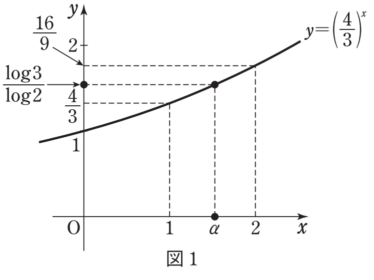


図 1

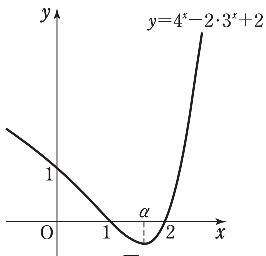


図 2

§3. 不等式 $4^x-2\cdot 3^x+2\leqq 0$ を解く～数学Ⅱの指数関数のグラフを使って～

この解法を示したところ，質問したのは 2 年生で指数関数の微分法は知らないということであった。そこで，2 年生でも理解できるように指数関数を使った解法も示しておいた。

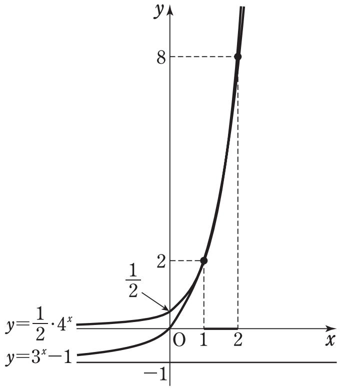
$f(x)=4^x-2\cdot 3^x+2$ とおくとき，

$$f(x)\leqq 0 \iff 4^x\leqq 2\cdot 3^x-2 \iff \frac{1}{2}\cdot 4^x\leqq 3^x-1$$

であるから，$y=\dfrac{1}{2}\cdot 4^x$ ……①，$y=3^x-1$ ……②

とおくとき，$f(x)\leqq 0$ の解は，①のグラフが②のグラフと共有点をもつときの x の値および①のグラフが②のグラフの下方にあるときの x の値の範囲である。

①のグラフは $y=4^x$ のグラフを y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものであり，②のグラフは $y=3^x$ のグラフを y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。そのグラフ(図 3)をかいて判断すれば(多少厳密さに欠けるが) $1\leqq x\leqq 2$ が解であることがわかる。



§4. まとめ

学園ドラマの中で，黒板に適当にかかれたものかもしれないし，それを観た生徒の記憶が間違っていたのかもしれないが，問題としては面白いのではないかと思って考察してみた。

解法１では，グラフをかくことで解くこともできるが，$f(1)=f(2)=0$ であることから $1<\alpha<2$ である α に対して $f'(x)\leqq 0$ $(x\leqq\alpha)$，$f'(x)\geqq 0$ $(x\geqq\alpha)$ を示せばよいという立場での解である。指数関数の導関数が必要なので数学Ⅲの履修が必要である。一方，解法②では数学Ⅱで扱う指数関数のグラフを利用した解である。ただし，指数関数 $y=a^x$ について，$y=ka^x$ $(k\neq 0)$，$y=a^{x-p}$，$y=a^x+q$ を扱うことまではしていないので，これらについても扱っておくとこのような問題にも対応できる。上位層の生徒には言及しておくとよいだろう。

さて，生徒が問題集の問題等の質問で来ることは多々あっても，テレビの中で見た不等式の問題に興味をもって質問に来るという経験はこれまでなかったので，ある意味新鮮なことであった。

漫画でもゲームでもいいから，そこに生徒の興味を引く数学的な問題が扱われるようになれば，学校数学が変わるかもしれない。

（山口県立高森高等学校）