地に脚を付けたコンパス

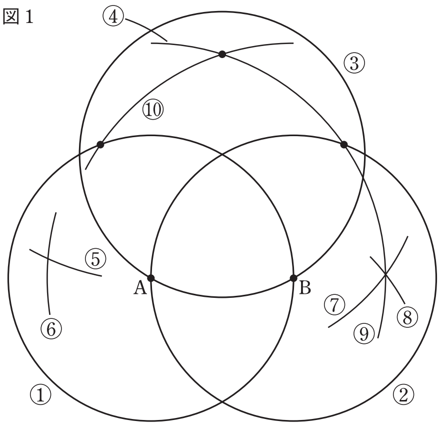
内藤　康正（ないとう　やすまさ）

§1. はじめに

作図問題の中に，コンパスのみによる作図があります。2 点 A，B があればそこには直線(あるいは線分)AB があると考えます。よく知られているものに線分 AB を 2：1 に外分する点や線分 AB の中点の作図があります。

このたび，与えられた線分 AB を 1 辺とする正 5 角形の他の 3 頂点を 10 手で作図することに成功しました。それが図 1 です。

図 1



この作図に至った経緯を紹介しつつ，コンパスのみによる作図の愉しみを紹介できたらと思い，小文にまとめてみることにしました。

発見のきっかけは，“地に脚を付けた”ことでした。

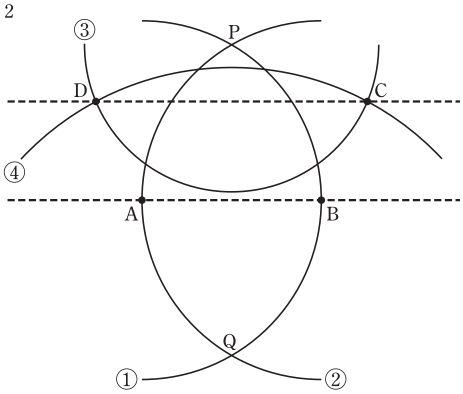
§2. 地に脚を付けた，不便なコンパス

作図におけるコンパスの機能は，数学Aの教科書にもあるように「与えられた 1 点を中心として，与えられた半径の円をかくこと」ですが，京都大学の不便益システム研究所製作の“素数ものさし”をヒントに，その機能を(もしかすると，これが元来の用い方ではないかとも思います)与えられた 1 点を中心として，他の 1 点を通る円を描くことのみに制限した不便なコンパスでの作図を考えてみました。長さを測って別の場所に移動させてはならない，文字通り“地に脚を付けた”コンパスです。

本稿では点Aを中心として点Bを通るように描いた円を A(B) で表すことにします。

さっそく，点Cを通り直線 AB に平行な直線の作図を紹介します。DC∥AB となる点Dの作図が目標ですから，平行四辺形 ABCD が作図できればよさそうですが，不便なコンパスでは等脚台形 ABCD の作図が簡単です(図 2)。

図 2



手順は

①A(B)　②B(A)　③P(C)　④Q(C)

のわずか 4 手です。不自由になった分だけコンパスの機能を最大限引き出す努力を要するところに楽しみがあり，定規とコンパスによる通常の作図で手数を減らすヒントが得られる場合があります。実際，等脚台形を利用すると，通常の作図ではわずか 3 手で平行線を引くことができます。

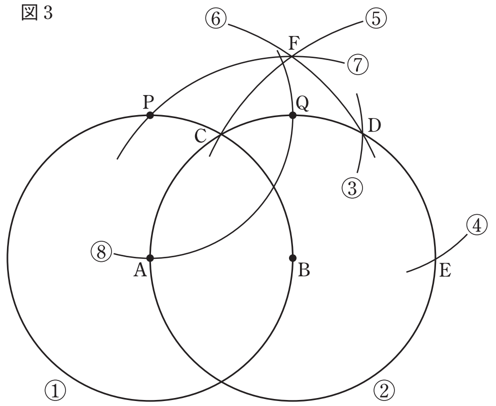
§3. 不便なコンパスで正方形の作図

では本題に入ります。まずは正方形の作図です。教科書でも，平行線に続いて正方形の作図問題がありますが，方針があまりにも正直すぎるために作図できた喜びに欠け，達成感も得られません。また，最初に与えられた線分を定規で延長することが作図として OK なのかという点も，少し気になるところです。

その点，コンパスのみで正方形を作図する問題は，あのナポレオンがイタリア遠征で仕入れてきて，学者たちに解かせて得意になったという伝説があるほど魅力的な課題です。

本稿では，2 点 A，B を与えて，線分 AB を 1 辺とする正方形の他の 2 頂点を不便なコンパスのみで作図することを考えてみます。なお，AB=1 とします。

図 3

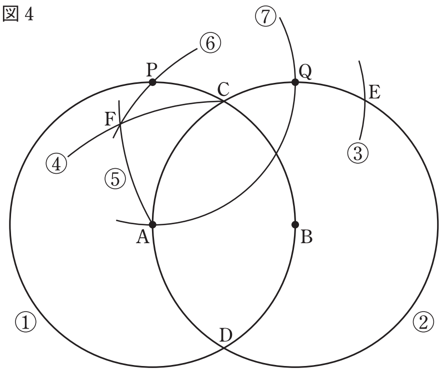


①A(B)　②B(A)　③C(B)　④D(B)
⑤E(C)　⑥A(D)　⑦B(F)　⑧P(A)

これまでは正方形の対角線として与えられたはずの $\sqrt{2}$ ですが，正方形の対角線に使える $\sqrt{2}$ をどうやって作図するか，という課題に直面します。図 3 は 8 手の解ですが，途中，⑤⑥によって $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ の直角三角形 FBE を作図して $FB=\sqrt{2}$ を得ています。そして⑦によって対角線 $PB=\sqrt{2}$ が作図されたことになります。

ところが，試行錯誤の結果 1 手節約できて 7 手の解があることに気が付きました(図 4)。

図 4



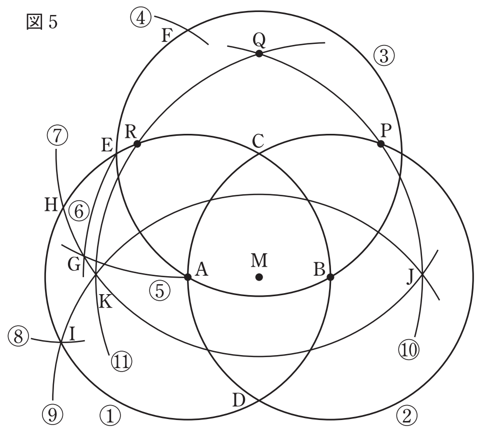
△FBE を 60° 回転させたことで，図 3 の④が不要となるのです。通常のコンパスによる作図でも，おそらくこれが最少手数と思われます。

そして，このアイディアが冒頭の正 5 角形の作図発見へとつながったのです。

§4. 不便なコンパスで正 5 角形の作図

これまでも時折コンパスのみでの正 5 角形の作図に取り組んできたのですが，13 手を切る作図は得られませんでした。

図 5



ところが，図 4 で示した $\sqrt{2}$ の作図がきっかけで，一気に 11 手まで短縮できたのです。それが図 5 で，与えられた 2 点 A，B について，線分 AB を 1 辺とする正 5 角形の作図になっています。

その解析は AB=1 として次の通りです。

$AF=\sqrt{3}$ の作図が

①A(B)　②B(A)　③C(A)　④E(C)

$CG=\sqrt{2}$ の作図が

⑤F(A)　⑥B(E)

で，ここまでが図 4 と同じ作図です。

次に

　⑦C(G)　⑧H(A)　⑨D(I)

によって，CJ＝DJ＝$\sqrt{2}$ から △CMJ が

$\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{5}}{2}:\sqrt{2}$ の直角三角形になり，MJ＝$\frac{\sqrt{5}}{2}$，

すなわち AJ＝$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$＝KB の作図に成功です。

あとは

⑩A(J)　⑪B(K)

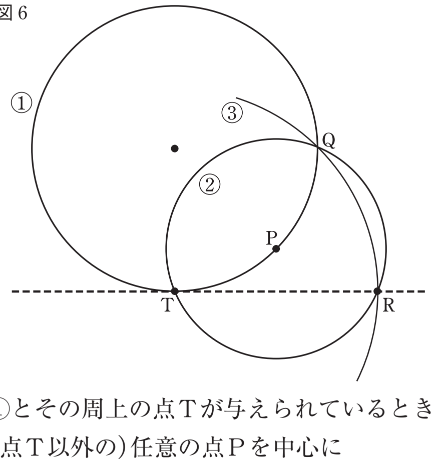
によって対角線 AP＝AQ＝BQ＝BR＝$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ が作図できます。通常のコンパスに戻ると更に1手省略できて，それが冒頭の10手の作図というわけです。長い間13手を切ることは無理と感じていたのですが，敢えて不便を強いることで3手も短縮できるという，なにか教訓めいた経験をした気がします。

以上が正5角形の作図です。

§5. 円の接線を3手で作図

この10手解の発見後，不便なコンパスを使って数手以内にできる作図をしらみつぶしに調べていたところ，思いがけない発見がありました。それが図6です。

図6



円①とその周上の点Tが与えられているとき，周上の(点T以外の)任意の点Pを中心に

　②P(T)　③T(Q)

とすると，なんとTRが点Tにおける接線になっているのです。その理由は以下の通りです。

△PQT は二等辺三角形ですから

$$\angle PQT = \angle PTQ$$

さらに二等辺三角形 TQR において，TP は頂角の二等分線になっていることから

$$\angle PTQ = \angle PTR$$

すなわち ∠PQT＝∠PTR となり，接弦定理の逆から TR は接線。という具合です。

§6. 結びに変えて

現行課程の数学Aになってから，教科書に作図が登場しましたが，時間的な制約と，作図そのものが大学入試で出題される可能性が低いことから，特に進学校の授業では作図分野の授業が割愛されることが多いのではないでしょうか。確かに数時間を作図に割くことは難しいと思われます。しかし，系統的なプログラムもなく，即効性も期待できない中，私自身は以下のような観点から“コンパスのみの作図”のために1時間，授業時間の捻出を毎年試みています。

(1) 図形的センス

いわゆる難関大学の入試問題では直接間接に図形に対する洞察力を要することがしばしばです。ところが順調に問題演習等をこなしてきた生徒が空間ベクトルや立体の体積の問題に直面すると，ごく簡単な対称性に気がつかず手を止めてしまうことがあります。図3で⑤手目までを示して「あとは BF＝$\sqrt{3}$ の作図」と誘導しても，⑥手目に気がつかない生徒もいます。いわゆる“図形的センス”というものが何を指すのかはあいまいですが，このセンスの有無は問題解決をかなり左右すると感じます。

(2) 気分転換

定期考査の返却日などの時間つぶしに「教科書の平行線の作図をもっと手数を減らせないだろうか」などと投げかけると，普段はあまり熱心でない生徒が生き生きと作業を始めることがあります。学問的には2次方程式の解が作図できることに意義があるわけですが，敢えて「コンパスだけ」という制限を設けることで「挑戦したい」という気持ちを刺激できるようです。数学好きの生徒からは，作図の授業をしてほしいという要望を受けることもあります。

(3) 考える力

三角関数も微分積分もなく，コンパス1つでただただ考えるのですから，まさに時代の要請とも言える「考える力」を養う時間になるのではないかと感じています。

(東京都立立川高等学校)