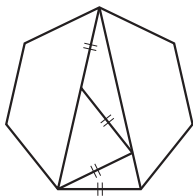


# 正七角形と3次方程式

おのざと たけひさ  
小野里 武久

## §1. はじめに

『数研通信』88号において、内藤先生は、3種類の二等辺三角形の敷き詰めによって正七角形の性質を考えさせるような教材を提案されました([1])。



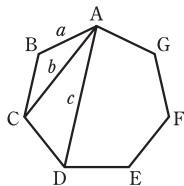
(右図は一部敷き詰めたところ)

ここでは、2種類の対角線の長さの間に成り立つ関係式について図形的に考えていきます。さらに、敷き詰めに必要な3種類の二等辺三角形の個数の一意性を鮮やかに示されました。

ここでは、先生の論考に関連して、興味深いと考えられる事柄を補足したいと思います。

## §2. 「比」を解とする3次方程式

正七角形の辺の長さを  $a$ 、2種類の対角線の長さを短い方から  $b, c$  とする。これらの長さの比を単に「比」と表すことにする。



(文献[1]では  $a=1, b=x, c=y$ )

正七角形 ABCDEFG は円に内接し、この7つの頂点のうち4つを頂点とする四角形は、ABCD, ABCE, ABDE, ABDF の4通りある。それぞれにトレミーの定理を用いると

$$\begin{aligned} a^2 + ac = b^2, & \quad ab + ac = bc \\ a^2 + bc = c^2, & \quad ab + b^2 = c^2 \end{aligned}$$

という4つの関係式が得られる。さらに「比」を

$$p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$$

とおくと、上の4式は

$$\begin{aligned} 1 + q = p^2 & \quad \cdots \cdots \textcircled{1} & p + q = pq & \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 1 + pq = q^2 & \quad \cdots \cdots \textcircled{3} & p + p^2 = q^2 & \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。

特に②は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$$

と表され、美しい対称性をもつ。

①～④の4式は独立ではない。たとえば、①、②から  $q$  または  $p$  を消去して  $p$  と  $q$  についての3次方程式をつくることができ、③、④はこれから導くことができる。[注1]

①、②から  $q$  を消去すると

$$\begin{aligned} p + (p^2 - 1) &= p(p^2 - 1) \\ p^3 - p^2 - 2p + 1 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

すなわち  $p = \frac{b}{a}$  は次の3次方程式の解である。

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \cdots \cdots (*)$$

また、①、②から  $p$  を消去すると、

$$\begin{aligned} 1 + q &= \left(\frac{q}{q-1}\right)^2 \quad \text{から} \quad (q+1)(q-1)^2 = q^2 \\ q^3 - 2q^2 - q + 1 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

すなわち  $q = \frac{c}{a}$  は3次方程式

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \quad \cdots \cdots (**)$$

の解である。(\*)と(\*\*)の係数に注意すると自然に次の考察に導かれるのではないだろうか。

いま⑥の両辺を  $q^3$  で割ると

$$\left(\frac{1}{q}\right)^3 - \left(\frac{1}{q}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{q}\right) + 1 = 0$$

であるから、 $\frac{1}{q} = \frac{a}{c}$  も3次方程式(\*)の解となる。

さらに  $r = \frac{q}{p}$  とおいて①、②の  $q$  を消去すると

$$1 + pr = p^2, \quad 1 + r = pr$$

これらから  $p$  を消去すると

$$\begin{aligned} 1 + (1+r) &= \left(\frac{1+r}{r}\right)^2 \\ r^3 + r^2 - 2r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

これは次のように書き換えることができる。

$$(-r)^3 - (-r)^2 - 2(-r) + 1 = 0$$

すなわち  $-r = -\frac{c}{b}$  も 3 次方程式(\*)の解となる。

以上をまとめると、次がいえる。

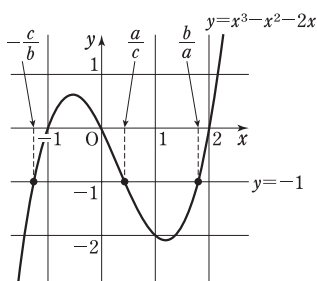
「比」  $\frac{b}{a}$ ,  $-\frac{c}{b}$ ,  $\frac{a}{c}$  は 3 次方程式  $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$  ……(\*) の 3 つの実数解である。[注 2]

これも正七角形がもつ美しい性質といえよう。

3 次方程式(\*)の 3 つの実数解は、3 次関数

$$y = x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

と直線  $y = -1$  との交点の  $x$  座標であるから次のようなグラフからおおよその値を見積もることができる。(近似値は後述)



文献[1]では、3 次方程式(\*)における解の巡回も指摘されている。それは  $\alpha$  が(\*)の解であるとき  $2 - \alpha^2$  も(\*)の解であり、3 回目では元の  $\alpha$  に戻るということである。実際  $f(x) = 2 - x^2$  とすると

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = -\frac{c}{b}, \quad f\left(-\frac{c}{b}\right) = \frac{a}{c}, \quad f\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{b}{a}$$

となることを①, ②および(\*), (\*\*\*)を用いて示すことができる。[注 3]

### §3. 「比」を含む等式

改めて 3 次方程式

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \dots\dots(*)$$

の 3 つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とすると、解と係数の関係から  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ,  $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = -2$ ,  $\alpha\beta\gamma = -1$

この第 2, 第 3 式から  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 2$

また

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 5 \\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma) = 6 \end{aligned}$$

したがって、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} - \frac{c}{b} + \frac{a}{c} &= 1, & \frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= 2 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 &= 5 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 &= 6 \end{aligned}$$

### §4. 角を用いた考察

ここまで「比」についてのみ考えたが、角も含めて考えると、より理解が深まるように思われる。正七角形で基本になる角は  $\theta = \frac{\pi}{7}$  で、これも馴染みがないが、実は  $2\cos\theta$  は 3 次方程式(\*)の解の 1 つになっている([1])。これを以下に示そう。

$7\theta = \pi$  であるから

$$\begin{aligned} \cos 4\theta &= \cos(\pi - 3\theta) \\ \cos 4\theta &= -\cos 3\theta \quad \dots\dots⑦ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 &= -4\cos^3\theta + 3\cos\theta \\ 8\cos^4\theta + 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 &= 0 \\ (\cos\theta + 1)(8\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$\cos\theta + 1 \neq 0$  であるから

$$8\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0 \quad \dots\dots⑧$$

$x = 2\cos\theta$  とおくと

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \dots\dots(*)$$

すなわち  $2\cos\theta$  は 3 次方程式(\*)の解である。

$$\theta' = 3\theta = \frac{3\pi}{7}, \quad \theta'' = 5\theta = \frac{5\pi}{7} \quad \text{とおくと,}$$

$7\theta' = 3\pi$ ,  $7\theta'' = 5\pi$  より

$$\begin{aligned} \cos 4\theta' &= \cos(3\pi - 3\theta'), \\ \cos 4\theta'' &= \cos(5\pi - 3\theta'') \end{aligned}$$

であるから、⑦と同様

$$\cos 4\theta' = -\cos 3\theta', \quad \cos 4\theta'' = -\cos 3\theta''$$

が成り立つ。

したがって、 $2\cos\theta'$ ,  $2\cos\theta''$  も 3 次方程式(\*)の解である。

$\theta = \frac{\pi}{7}$  のとき、 $2\cos\theta$ ,  $2\cos 3\theta$ ,  $2\cos 5\theta$  は 3 次方程式  $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$  ……(\*) の 3 つの実数解である。

この結果は、以下のことから当然だといえる。

右図において、二等辺三角形 ABC, ACE, ADE に着目すると

$$\begin{aligned} b &= 2a \cos \theta, \\ c &= 2b \cos 2\theta \\ &= -2b \cos 5\theta, \\ a &= 2c \cos 3\theta \end{aligned}$$

であるから

$$2 \cos \theta = \frac{b}{a}, \quad 2 \cos 5\theta = -\frac{c}{b}, \quad 2 \cos 3\theta = \frac{a}{c}$$

である。

$\frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{7} > 0$  から  $\sqrt{3} < 2 \cos \frac{\pi}{7} < 2$  のように解の値の範囲を絞ることができる。3つの解の近似値は

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= 2 \cos \frac{\pi}{7} \doteq 1.801938 \\ -\frac{c}{b} &= 2 \cos \frac{5\pi}{7} \doteq -1.246980 \\ \frac{a}{c} &= 2 \cos \frac{3\pi}{7} \doteq 0.445042 \end{aligned}$$

である。

§3. で述べた内容の一部を  $\theta$  を用いて書き表すと

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta &= \frac{1}{2}, \\ \cos \theta \cos 3\theta \cos 5\theta &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

などとなる。また、正七角形の外接円の半径を  $R$  とすると、正弦定理から

$$\frac{a}{2R} = \sin \theta, \quad \frac{b}{2R} = \sin 2\theta, \quad \frac{c}{2R} = \sin 3\theta$$

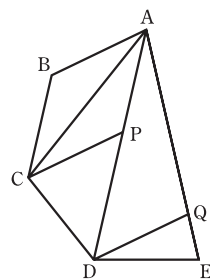
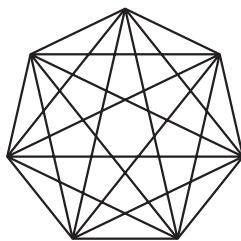
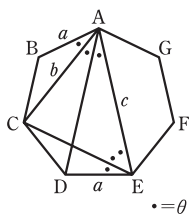
であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{1}{\sin 3\theta}, \\ \left(\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}\right)^2 &= 5 \end{aligned}$$

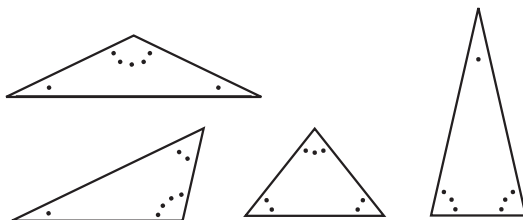
も成り立つ。これらは三角関数の等式としてなかなか面白い。計算の練習問題として使うことが考えられるが、⑧のような関係式が必要となろう。

## §5. おわりに

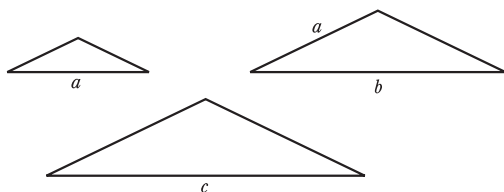
正七角形は馴染みの薄い図形ですが、まだまだ面白い数理をもっているのかも知れません。



対角線をすべて引いた上の左図を見ると、 $\theta = \frac{\pi}{7}$  の整数倍を内角とする次の4種類の三角形があるのが分かります。



相似な図形については下の図のように既知の長さから他の辺の長さを求めることができます。



他の3種についても同様です。これらを利用すると①~④を導くことができます。

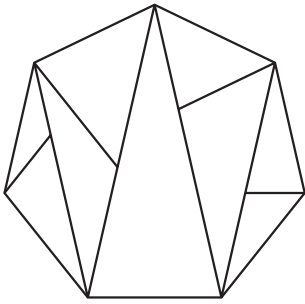
上の右図からは、§1. の敷き詰め問題の解答が見てとれます。(△ABC≡△APC, △ACD≡△AQD に注意)

文献[1]では授業の導入としてパズル的な問題を用いていますが、次のような別のパズルも考えてみました。

正七角形を次の条件を満たす三角形に分けよ。

- ・ 4種類の三角形を2つ以上含む
- ・ 三角形はすべて合同ではない

次の図は解の1つですが、もっと良い解があれば教えてください。



[注1]  $1+q=p^2$  ……①

を用いて  $q$  を消去し

$$p^3-p^2-2p+1=0 \quad \dots\dots⑤$$

を用いばよい。

$$q^2-pq-1=q(q-p)=(p^2-1)(p^2-p-1)-1$$

$$=p(p^3-p^2-2p+1)=0$$

$$q^2-p^2-p=(p^2-1)^2-p^2-p$$

$$=(p+1)(p^3-p^2-2p+1)=0$$

したがって

$$1+pq=q^2 \quad \dots\dots③, \quad p+p^2=q^2 \quad \dots\dots④$$

計算の基本方針は、文字の消去である。

[注2] 3つの比  $\frac{b}{a}, -\frac{c}{b}, \frac{a}{c}$  の逆数  $\frac{a}{b}, -\frac{b}{c},$

$\frac{c}{a}$  は、次の3次方程式の3つの実数解になる。

$$x^3-2x^2-x+1=0 \quad \dots\dots(**)$$

$\theta$  を用いて次のようにも証明できる。

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin 6\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= 3-4\sin^2 2\theta = 1+2\cos 4\theta$$

$$-\frac{b}{c} = -\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} = \frac{\sin 9\theta}{\sin 3\theta} = 1+2\cos 6\theta$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 1+2\cos 2\theta$$

$\phi=2\theta=\frac{2\pi}{7}$  とおくと、 $7\phi=2\pi$  から

$$\cos 4\phi = \cos(2\pi-3\phi)$$

$$\cos 4\phi = \cos 3\phi \quad \dots\dots⑨$$

これから  $8\cos^3\phi+4\cos^2\phi-4\cos\phi-1=0$

$y=2\cos\phi$  とおくと

$$y^3+y^2-2y-1=0 \quad \dots\dots(***)$$

$\phi'=2\phi, \phi''=3\phi$  についても、⑨と同様な式が成り立つ。よって  $2\cos 2\theta, 2\cos 4\theta, 2\cos 6\theta$  すなわち

$\frac{a}{b}-1, -\frac{b}{c}-1, \frac{c}{a}-1$  は3次方程式(\*\*\*)の3つ

の実数解である。これを用いて  $\frac{a}{b}, -\frac{b}{c}, \frac{c}{a}$  が

(\*)の解であることがいえる。

[注3]  $\alpha$  が3次方程式(\*)の解である、すなわち

$$\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=0$$

のとき、 $\beta=2-\alpha^2$  とすると

$$\beta^3-\beta^2-2\beta+1=\beta(\beta+1)(\beta-2)+1$$

$$=(2-\alpha^2)(3-\alpha^2)(-\alpha^2)+1$$

$$=-(\alpha^6-5\alpha^4+6\alpha^2-1)$$

$$=-(\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1)(\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1)=0$$

すなわち  $2-\alpha^2$  も(\*)の解である。

また、①、②、⑤、⑥を用いると

$$2-p^2=1-q=-\frac{q}{p}$$

$$2-\left(-\frac{q}{p}\right)^2=2-(1-q)^2=\frac{-q^3+2q^2+q}{q}=\frac{1}{q}$$

$$2-\left(\frac{1}{q}\right)^2=2-\left(\frac{p-1}{p}\right)^2=\frac{p^2+2p-1}{p^2}=\frac{p^3}{p^2}=p$$

$\theta$  を用いた証明は容易である。

### 《参考文献》

[1] 『数研通信』88号(2017年5月)

内藤康正『正七角形のはなし』

(元 茨城県 清真学園高等学校・中学校)