アニメーションを利用した順列・組合せの指導

村上（むらかみ）　仙瑞（せんずい）

§1. はじめに

生徒が苦手とする，場合の数という単元の「順列の応用（人の並び方の総数）」「円順列」「組合せ」「同じものを含む順列」「組分けの総数」。生徒の多くは解き方のみパターンで覚えて解く。パターンで覚えた生徒は，少しひねられた問題が出題されると，解けなくなる。その理由の１つは，求め方の仕組みを理解していないことと考える。これらの内容は，解き方のパターンを覚えることは簡単だが，きちんと理解しようと教科書を読んでもイメージがわきにくい。そこで，それらの求め方の仕組みを，パワーポイントを用いて動き（アニメーション）を入れて解説したところ今までになく生徒の理解度が上がった。

今回のレポートは，その授業で用いたスライドをネット上で紹介して，そのスライドについての作成の思い入れと，スライド作りでどのように工夫したかのポイントを述べるという今までの数研通信に掲載されたようなものと趣向を変えた。

どのようなスライドを使ったか，どのような工夫をしたかは百聞は一見にしかずで，直接サイトにアクセスしてご覧いただきたい。サイトのアドレスまたはQRコードは最後（p.17）に掲載している。

各単元をクリックすると，問題とその動画解説（パワーポイントを動画にしたもの），パワーポイントの埋め込みを１つのページに用意している。パワーポイントの埋め込みファイルは，タブレットやスマホなどのタッチパネル対応であれば画面をタッチすることで次に進むことができる。また，アップしているパワーポイントファイルはダウンロードすることもできるので，もしご利用したければメールで使う旨を書いていただけたら，授業で使っていただいても構わない。またその際感想などいただけたら幸いである。

§2. 順列の応用

1．男子３人，女子２人が横１列に交互に並ぶ並び方は何通りあるか。

2．男子４人，女子３人が横１列に並ぶ。次のような並び方の総数を求めよ。

(1)　左端には必ず女子がいる並び方

(2)　両端には必ず男子がいる並び方

(3)　女子３人が続いて並ぶ並び方

である。それぞれの答えは，**1** は $3!\times2!$，**2** の(1)は ${}_3C_1\times6!$，**2** の(2)は ${}_4P_2\times5!$，**2** の(3)は $3!\times5!$ で求めることができるが，なぜ掛け算をするのか，その意味について「１つを固定してその固定してできた塊がさらに何個あるか」という視点から説明した。特に(3)についてパターンとして女子３人を１人の人間として考えるというテクニックが使われるが，長年の指導上生徒はいまいちイメージがつかめない。そこで３人を１人とするというアニメーションを作り，そうすることによって常に女子が３人続いて並ぶことができるという理解を促すことができた。

§3. 順列の総数を“割る”という統一的な指導

組合せについて，各社の教科書や受験参考書を読み比べてみても，だいたい同じようなことがかいてあり，１つの組合せの具体例を出し，

$$組合せの数\times r!={}_nP_r$$

と簡単に説明をすませている。生徒の方も最初に公式ありきの感じを受ける。なぜ，理解しにくいのか。それは式だけではイメージがわきにくいからである。円順列，組合せ，同じものを含む順列，組分けの総数を求めるとき，計算で共通することは，**順列の総数を数字（階乗）で割る**ということ。生徒はこれらすべてを別々のものと考えている場合が多いし，ど

うしてそのような計算をするのか理解できていない人も多いように思える。

しかし，これらの求め方の仕組みは共通している。教科書を通じた解説では，断片的になっているので，生徒はその共通に仕組みになかなか気づかずにいる。そこで根底にある共通している考え方をアニメーションで説明できたらイメージで理解度も増すと考え，パワーポイントでスライドを作り解説した。

スライドを作るに当たってのポイントは，先ほどの問題の求め方の仕組みは共通しているということを意識させるために，

(1) 順列の総数をすべてかき出す。
(2) すべてかき出した順列の要素で，同じ特徴のものを横に並べ，束にして**長方形の形**になるアニメーションを作る(ここがポイント！)。
(3) 長方形の形になった要素の総数は，順列の総数と同じで，この順列の総数を長方形の面積とみなす。
(4) 横に並べた束の数を数え(横の長さとみなす)，その束にしたものが何セットあるか(問題の求める総数：縦の長さとみなす)を考える。

というのが統一的な考えであり，図形の言葉を使ってイメージ化させた。このような考えをスライド上でアニメーションにすることによって，ばらばらだった問題が統一的なポイントとして集約される。

この統一的な視点で解説できる問題について，以下の問題についてアニメーション部分のポイントのみを述べる。詳しい解説はスライドの中を参照されたい。これらの問題は授業で扱った問題のみである。

3.1　円順列

A，B，C，Dの4人が円になって座るとき，座り方は全部で何通りあるか。

ポイント

4人の順列 $4!=24$ 通りをすべてかき出した後，ABCD, BCDA, CDAB, DABC の4つを取り出し，一番前と一番後ろ，前後でロープでつなぐと円になり，これら4つの円は回転すると重なる。このように24通りのうちにロープでつないで円を作り回転すると重なるものは4つずつのグループを作ることができる。24個かき出した順列を，4つずつのグループごとに並び替えて，長方形の形を作り，円順列の総数を冒頭で述べた要領に従って計算する。

3.2　組合せ

A，B，C，Dの4個の中から，3個取り出すときの組合せの総数。

ポイント

4個の中から3つ選んで並べる順列をすべてかき出すアニメーションをつくる。全部で ${}_4P_3=24$ 通りある。その中から，3個の文字の種類が同じものを，たとえばABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBAを横1列に並べる。このように同じ種類でできているものはそれぞれ6つあり，6個ずつのグループごとに並び替えて，長方形の形を作り，組合せの総数を冒頭で述べた要領に従って計算する。

3.3　同じものを含む順列

(1) A，A，A，B，Bが横1列に並ぶ並び方の総数
(2) A，A，B，B，Cが横1列に並ぶ並び方の総数

ポイント

まずはすべて違うものと区別して(Aを A_1，A_2，A_3，Bを B_1，B_2 などとおく)順列を考え，樹形図を使って $5!=120$ 個すべてかき出すアニメーションを作る。この120個のうち，同じ特徴のもの，たとえばAAABBの順番になっているもの，AABBCの順番になっているものを横1列に並べる。前者は $3!\cdot 2!=12$ 通り，後者は $2!\cdot 2!=4$ 通りある。これらの12個，4個ずつのグループごとに並び替えて長方形の形を作り，同じものを含む順列の総数を冒頭で述べた要領に従って計算する。

3.4　組分けの総数

1．A，B，C，D，E，Fの6人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。
(1) ア，イ，ウの3つの部屋に，2人ずつ分ける。
(2) 2人ずつ3つの組に分ける。

2．8人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。
(1) 3人部屋ア，イと2人部屋ウの3つの部屋に分ける。
(2) 3人，3人，2人の3つの組に分ける。

3．A，B，C，D，Eの5人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。
(1) 3人部屋アと2人部屋イの2つの部屋に分ける。
(2) 3人，2人の2つの組に分ける。

ポイント

まず，組分けの問題で，どういうときに階乗で割るのか。その仕組みが理解できていないといけない。上記のような，入る部屋に関係なく，組分けのみを考える問題は，すべて階乗で割るとは限らない。仕組みを理解するためにアニメーション作りでは，次のことに留意して作った。

1 から **3** の問題で共通することは，樹形図を使って，それぞれ 6 人を 2－2－2，8 人を 3－3－2，5 人を 3－2 に分けた場合，それぞれの組は順番がつけられていることを強調する。つまり，組分けの順列の総数を求めたことになり，それぞれの⑴の解答となっている。

次に，かき出した組分けの順列の総数で，同じ特徴のあるものを 1 つの束にして，横 1 列に並び替えていく。たとえば，**1** であれば，AB－CD－EF，AB－EF－CD，CD－AB－EF，CD－EF－AB，EF－AB－CD，EF－CD－AB を横 1 列に並び替える。**2** であれば，ABC－DEF－GH，DEF－ABC－GH を横 1 列に並び替える。同じようにして同じ人間の組のパターンが同じものを横 1 列に並べ直して長方形を作っていく。**1** であれば，横の数は，AB，CD，EF の順列の総数で 3!＝6 通りあり，**2** であれば，横の数は，GH は固定で，ABC と DEF の順列の総数で 2!＝2 通りあり，**3** であれば，人数の違うグループを作ると，同じ人間の組のパターンが 1 通りしかないことに気づく。つまり **3** は，⑴で求めた順番をつけた組分けの数と同じである。これも横の数が 1 通りしかなくても，あえて長方形の形に並べることによって，イメージでより理解が深まるはずである。

こうして長方形の形に並べかえることによって，組分けの総数を冒頭で述べた要領に従って計算する。

すべての順列をかき出すことによって，**1** や **2** の同じ数が含まれる順番のついた組分けをした場合，同じ組分け方のものが存在することに気づくはずである。この部分がきちんと視覚化されると理解しやすい。教科書や参考書などでは，計算式だけで並べ方の総数を求めているので，順番をつけて並べた場合，**1** の場合に同じ 2 人組が 2 番目，3 番目に現れることがなかなかイメージできない。

以上，今回は階乗で割って組合せを求めるテーマを取り扱ったが，とにかく分子の部分がすべてを区別した並び方の総数であるということ(つまり順列)，そして，その順列には束ができ，束の要素の順列が分母の部分であるということを気づかせることで，すべて考え方としては共通している。生徒の中には，例題が変わるたびにこれらの使う式は全く違うものだと認識してしまう生徒も多々いる。根底にある考え方は全く同じであることに気づいてほしいと授業を展開している。**順列の総数を“割る”というポイントは，すべてのものを区別した順列は，同じ特徴の束を作ることができ，その束が何個あるか数えることである。理解を深めるには，かき出したすべての順列の要素をその束ごとに並び替えるという動きが大事だと考える。そして，視覚的にイメージで理解すること**だと思っている。

またこれらの問題について長方形の形に並べ直したプリントを私のサイト(巻末にアドレス)に掲載したので，ダウンロードをして自由に使っていただいても構わない。

§4. 最後に

アニメーションを用いて，これらの問題を解説しようと思ったきっかけは，数学が苦手な生徒は，式変形の背景をイメージできないということを指導経験から感じたからである。詳しいプリントを作ってみても，もっと理解してくれる生徒が増えてもいいのではないかとも思った。プリントではある程度の効果はあったが，ある程度以上までは伸びなかった。その越えられない壁は，「動き」があるかないかである。数年前の教育状況と違って，ICT 教育が盛んに唱えられ，その教育の時代の流れに乗れないかと考えたわけである。マイクロソフトのパワーポイントで無限の可能性を見つけ，これを数学教育に生かすことができないかと考える中，このようなアニメーションを使った指導法を思いついた。

ファイルを作ることによって，数十分で何回も解説でき，繰り返すことによってしかもイメージを植え付けることができる。復習も楽である。またスライドは動画にして，You Tube や自分の HP にアップロードして，ネットにつながっていればいつでもどこでも，授業の復習ができるようにした。休んだ生徒や理解が遅れている生徒も対応できるのがとても大きかった。

ただ勉強の基本は手を動かして考えることが基本

であることを忘れてはいけない。**順列，組合せ，確率で何よりも大事なことは，まず手でかいて数えるという作業である**。生徒はやたらこの分野で公式を使いたがるが，公式に頼るのは最終手段であり，公式の意味を心底理解した者のみが許されるものだと思っている。かき出して数えることが確率の分野の基礎であり基本である。生徒の感想も「やはり先生，手でかいてみないとわかりませんね。かき出してようやくわかりました」という意見が多々聞かれ，すごく印象に残っている。これを怠ったらこの分野の理解はなかなか得られないと思っている。

　まず数式変形の背景をイメージで理解して，手を動かして演習する。数学ができるようになるために，これらが双璧をなしていることを忘れてはいけない。

《参考文献》

〔1〕『数学Ａ』，数研出版

スライド掲載サイト
http://essential-math.main.jp/visitors/hdougasankou/
QR コード

（兵庫県　甲南高等学校・中学校）