

# 立方体+直方体=星型八面体

ないとう やすまさ  
内藤 康正

## §1. きっかけ

きっかけは、数列の授業中のことでした。その授業では、教科書の例題にある数列の和

$$S=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$$

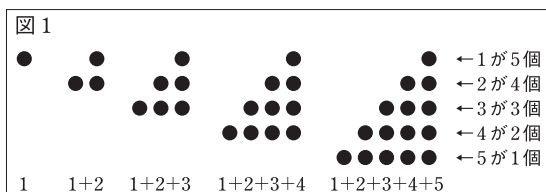
と、節末問題の数列の和

$$T=1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+n\cdot 1$$

がいずれも  $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$  になること、またそのことを図形的数で見る計画をしていたところでした。例えば  $n=5$  の場合、平面上の図形的数を利用すると、和  $T=1\cdot 5+2\cdot 4+3\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 1$  を

- 「1 (●) が 5 個」
- + 「2 (●●) が 4 個」
- + …
- + 「5 (●●●●●) が 1 個」

と見て上から1段ずつ図1のように並べることで、 $S=T$  であることが見て取れます。



ところがその話に入る前に、和  $T$  は

$$n \text{ が奇数なら } T=1^2+3^2+5^2+\cdots+n^2$$

$$n \text{ が偶数なら } T=2^2+4^2+6^2+\cdots+n^2$$

になりそうだとある生徒が発言したのです。

はじめは半信半疑だったのですが、図1で、左から2番目と4番目の三角形を逆さまにして3番目と5番目の三角形の左上に補えば説明が付くことに気がつきました。 $n$ が偶数のときは、左から奇数番目の三角形を偶数番目に補えばOKです。数列の和  $T$  (または  $S$ ) が奇数または偶数だけの平方数の和で表せることを、このとき初めて知りました。まさに、教えることは、教えられることでもある、という場面でした。

## §2. 四面体数

和  $S=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$  については、図1で「●」1個を等大の球と見立てて四面体状に積み上げたときの球の個数を上から1段ずつ数えたものと解釈できますから、本稿では四面体数と呼び、 $n$ 段のときの球の個数を  $R_n$  と表すことにします。

§1. から、 $R_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$  は次のような3通りの表現ができることが分かりました。

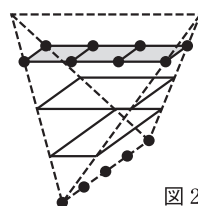
$$R_n=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n) \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$R_n=1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+n\cdot 1 \quad \cdots\cdots\text{②}$$

$$R_n=n^2+(n-2)^2+\cdots\begin{cases} +3^2+1^2 \\ +4^2+2^2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\text{③}$$

②や③も四面体数として解釈することは可能でしょうか？まず②は、図2のように四面体を1対の対辺を水平になるようににおいて、上から1段ずつ●を数えていくと、 $R_5$ では

- 最上段には  $1\times 5$  個、
- 2段目には  $2\times 4$  個、
- 3段目には  $3\times 3$  個、
- 4段目には  $4\times 2$  個、
- 5段目には  $5\times 1$  個、



並んでいることから、四面体数になる解釈が得られます。(図2では2, 5段目のみ球を描いた)

③は苦心の末、図3のように“四面体たまねぎ”の皮を1枚ずつむいていくと良いことに気がつきました。

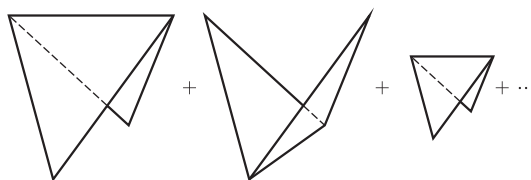


図3

皮1枚に乗っている●の個数が平方数になっています。また，“たまねぎ”のサイズ(四面体の段の偶奇)によって，●1個が芯となって残ったり残らなかったりします。

偶然ですが，きっかけは続きました。参考文献[1]で四面体数  $R_n$  を用いた八面体数の導出を見かけたのです。その文献には「他の方法も知られている」とあったので，他の方法を探してみることにし，得られた結果をこの小文にまとめてみようと思った次第です。文献には，古代ギリシャの「プセーポイ代数」と呼ばれる，小石を並べて公式を証明する技法としての図形的数は教育上有用な手法であると述べられています。

### §3. 八面体数

八面体数は，文字通り正八面体状に球を配置したときの球の数のことで，参考文献[1]にならって  $O_n$  とします。

八面体を，正四角錐を正方形の面で張り合わせた図形として見れば，平方数の和の公式を用いることによって

$$\begin{aligned} O_n &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &\quad + \{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} \quad \dots\dots④ \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{3}n(2n^2+1) \end{aligned}$$

になりますが，図4のように，正四面体から小四面体を4つ切り落としたものと解釈すると，この  $O_n$  が

$$O_n = R_{2n-1} - 4 \times R_{n-1} \quad \dots\dots⑤$$

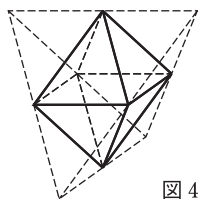


図4

で計算できることが文献で紹介されていたのです。計算は

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{1}{6}(2n-1)2n(2n+1) - \frac{4}{6}(n-1)n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}n(2n^2+1) \end{aligned}$$

となります。

前置きが長くなりましたが，ここから八面体数  $O_n$  を導く「他の方法」に入ります。なお，具体例はすべて  $O_5$  になっています。

### §4. 他の方法の探究 (1)

まずは正八面体と双対な立方体が利用できないかを考えたのですがうまくいきませんでした。そこで次に頭に浮かんだのが，正八面体を1つの面を水平に置いたとき，真上から見た平面図を描く問題が2008年に東京大学で出題されて話題になったことでした。正八面体をそのように置いて，上から1段ずつ球の並びを調べてみます(図5)。

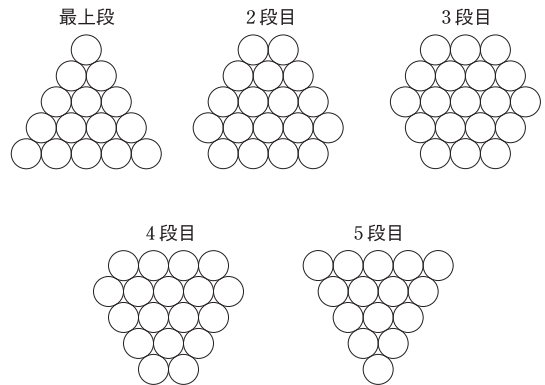


図5

個数を数えてみると，

最上段	1+2+3+4+5
2段目	2+3+4+5+4
3段目	3+4+5+4+3
4段目	4+5+4+3+2
5段目	5+4+3+2+1

の合計となりますが，この合計は，右上と左下の三角形の空白部分に

$$R_4 = 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4)$$

を補うことによって，各段が

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 5^2$$

になるので

$$O_5 = 5 \times 5^2 - 2 \times R_4$$

となります。まず

$$O_n = n^3 - 2R_{n-1} \quad \dots\dots⑥$$

という表現が得られました。

ところで，⑥に  $n^3$  が現れたことから，立方体を用いた解釈の可能性をもう一度考えてみたところ，図6の右のようなとらえ方ができると気がつきました。立方体を利用した八面体数の導出は，図6の左のような双対な位置関係からはうまくいかないのですが，右のように正八面体をひしゃげて立方体に埋め込むことでうまくいくことが図らずもわかっ

たのです。こうした思わぬ発見に出会うのは別解法を探求する楽しみでもあります。

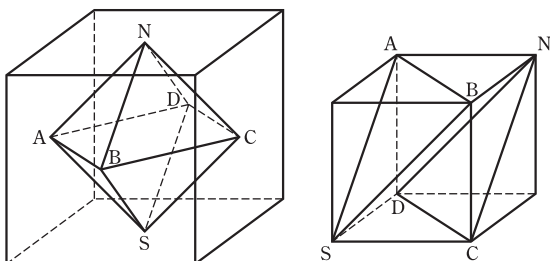


図6

### §5. 他の方法の探究 (2)

次に、図7のように置いた正八面体を真上から見てみます。すると、球は図8のように正方形状に並んでいます。図8の番号の数字は、その位置に鉛直方向に並んでいる球の個数になっています。ですからこの番号の合計が  $O_5$  になります。

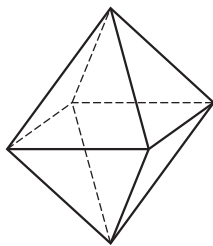


図7

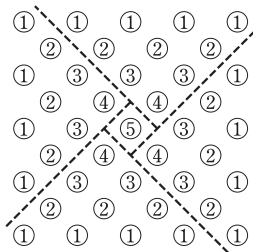


図8

図8の点線で区切ってみると、中心に鉛直方向縦1列に並んだ5個の、いわば心棒の周囲4方向に

$$R_4 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1$$

を配置したものが  $O_5$  になっていることが分かります。すなわち、次の式を得たことになります。

$$O_n = n + 4R_{n-1} \quad \dots\dots ⑦$$

### §6. 他の方法の探究 (3)

図9のように、傘状の皮を上下交互に組み合わせたものと解釈することもできました。

- 1 番外側の皮には  $41 = 5^2 + 4^2$  個
- 2 枚目には  $25 = 4^2 + 3^2$  個
- 3 枚目、4 枚目には  $13 = 3^2 + 2^2$  個、  
 $5 = 2^2 + 1^2$  個

そして芯に1個の球があります。

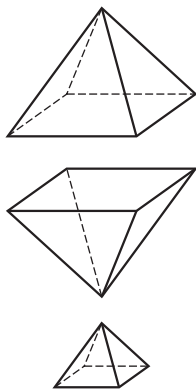


図9

皮1枚に連続する平方数の和が現れる理由は、図10(1枚目の皮を上から見たもので図8と同じ)のように白玉黒玉に色分けすると、白玉が  $4^2$  個、黒玉が  $5^2$  個あることから分かります。つまり

$$O_n = n^2 + (n-1)^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 \quad \dots\dots ⑧$$

を得ました。これは④を並べ替えたものです。

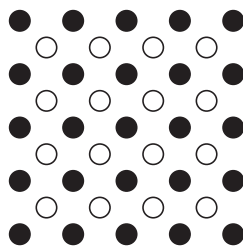


図10



図11

他にも、図11のような側面の皮むきからも⑧が得られますが、冗長になるので割愛します。

### §7. むすびに変えて

2013年度の早稲田大学で、立方体の4つの頂点からできる2組の正四面体の共通部分の体積を求める問題が出題されました(図12)。

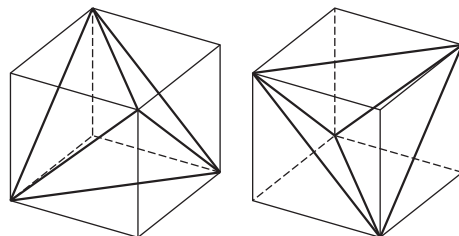


図12

共通部分は正八面体ですが相貫体はケプラーの星型八面体で、正八面体の各面に小正四面体を貼り付けたものですから、その図形的数を  $Star_n$  とすれば

$$Star_n = O_n + 8R_{n-1}$$

になります。この計算をいろいろ試したところ

$$⑥より \quad 2O_n + 4R_{n-1} = 2n^3$$

$$⑦より \quad O_n - 4R_{n-1} = n$$

これらを辺々引いて

$$Star_n = O_n + 8R_{n-1} = 2n^3 - n \quad \dots\dots ⑨$$

というすっきりした結果を得ました。この式の解釈を試みたところ「 $-n$ 」がうまくいきませんでした。ある日突然

$$Star_n = 2n^3 - n = n^3 + (n^3 - n)$$

$$= n^3 + (n-1)n(n+1) \dots\dots⑩$$

にひらめきました。驚いたことに

星型八面体=立方体+直方体

だったのです。図6の右をもとに、図13のように考えると、小四面体  $R_{n-1}$  が6個で3辺が  $n-1, n, n+1$  の直方体に相当。②を活かして小四面体をうまく積み直すと、小四面体6個で直方体にするにも成功しました。 $n$  を  $n+1$  にすれば、これはとりも直さず  $R_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$  の、図形的数による証明そのものです。

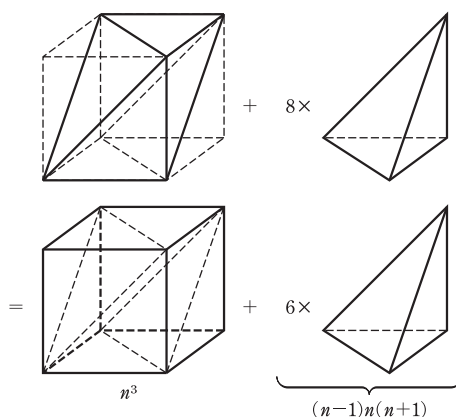


図13

《参考文献》

- [1] 数の世界 一松信 著 丸善出版  
(東京都立立川高等学校)