重　心
～四角形と五角形の重心を求めよう～

木尾（きお）　直子（なおこ）

§1. はじめに

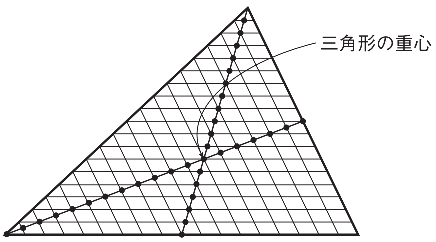
線分，三角形の重心の考え方を発展させて，四角形と五角形の重心を求める授業を行ったところ，誤答例をきっかけに n 角形の重心まで簡単に一般化できることが分かった。ここにその報告をする。

§2. 方法

１クラスを 6 班に分け，厚紙で作成した四角形，五角形，コンパス，ものさし，押しピン，糸を与えた。

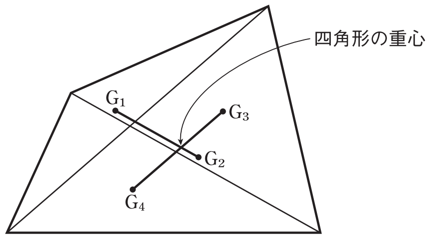
まず，線分の重心が中点であることを確認し，次に三角形の重心を以下のように考えれば求められることを確認した。

三角形を１つの辺に平行な線分の集合と考え，それらの重心である中点を結ぶ線分を引くと，その線分上に三角形の重心がある。次に，三角形を他の１辺に平行な線分の集合ととらえるとやはり，それらの中点を結んだ線分上にあるため，それらの交点が三角形の重心である。

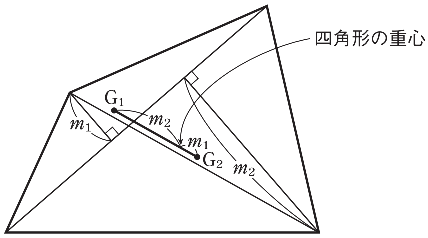


ここから，班で四角形の重心がどこになるかを考えさせる。こちらが，あらかじめ用意した正解は以下の 3 通りである。

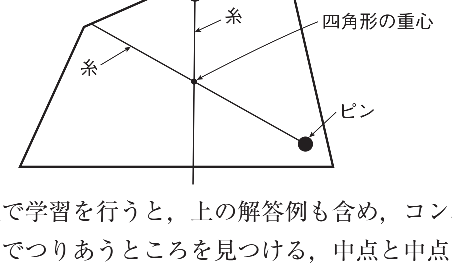
(Ⅰ)　四角形を対角線で 2 つの三角形に分け，それらの重心 G_1，G_2 を求める。次に別の三角形 2 つに分け，重心 G_3，G_4 を求める。このとき，線分 G_1G_2 と線分 G_3G_4 の交点が四角形の重心である。



(Ⅱ)　四角形を 2 つの三角形に分けて重心 G_1 と G_2 を求める。次に線分 G_1G_2 をこれらの三角形の重さの逆の比に内分する。重さの比は面積の比である。今，底辺は共通であるから高さの比の逆の比で内分すればよい。



(Ⅲ)　糸を結んだ押しピンを三角形の好きなところにさしてバランスを取り，止まったところの糸の上をなぞる。糸の左右の重さの比がつりあっているため，この作業を 2 回行ってできた交点が重心である。

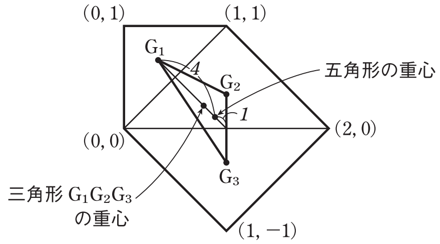


班で学習を行うと，上の解答例も含め，コンパスの針でつりあうところを見つける，中点と中点を結ぶ線分の交点（誤答）など，正答，誤答様々な答えが出てくる。ここでは，誤答の紹介はしないが，何故重心ではないのかの説明は出来る限り行った。

その後，３つの正答例を紹介し，五角形の重心を考えさせた。

正解例は，(Ⅰ)と(Ⅱ)の発展，つまり五角形を三角形と四角形の集合と考えて重心を導くものと(Ⅲ)が考えられる。

しかし，多くの班は次のように考えた。三角形３つに分け，それらの重心を３つ求め，その３点を頂点とする三角形の重心が五角形の重心である。これが誤答であることは以下のような五角形を考えることですぐに分かる。



この例では，３つの三角形の重心はそれぞれ，$G_1\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，$G_2\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$，$G_3\left(1,\ -\dfrac{1}{3}\right)$ である。三角形 $G_1G_2G_3$ の重心は $\left(\dfrac{7}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$ である。ところが，五角形の重心は先ほどの(Ⅱ)でも求められることから，三角形の重心 $G_1\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ と四角形の重心 $(1,\ 0)$ を結ぶ線分を重さの逆の比 $4:1$ に内分した点としても求められる。よって，$\left(\dfrac{13}{15},\ \dfrac{2}{15}\right)$ が実際の重心であることが分かる。

では，この重心は３つの重心を利用してどのように求められるのか。以下の式から簡単に求められる。

$$\frac{1\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)+2\left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)+2\left(1,\ -\dfrac{1}{3}\right)}{1+2+2}=\left(\frac{13}{15},\ \frac{2}{15}\right)$$

つまり，単純な平均と加重平均の違いで，重心は加重平均である。

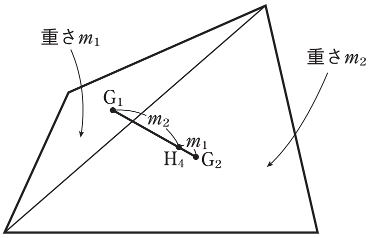
n 角形の重心は，

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} m_k\overrightarrow{g_k}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} m_k}$$

と予想できる。ここで，$G_k(\overrightarrow{g_k})$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$ は三角形の重心の位置ベクトル，m_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$ はそれに対応する三角形の重さとする。

すると，四角形の重心 $H_4(\overrightarrow{h_4})$ は，２つの三角形の重心を結ぶ線分を $m_2:m_1$ に内分した点であるから，

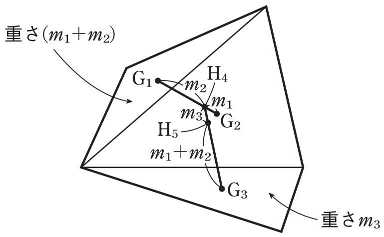
$\overrightarrow{h_4}=\dfrac{m_1\overrightarrow{g_1}+m_2\overrightarrow{g_2}}{m_1+m_2}$ である。



五角形の重心 $H_5(\overrightarrow{h_5})$ は，四角形の重心と三角形の重心を結ぶ線分を $m_3:(m_1+m_2)$ に内分した点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_5}&=\frac{(m_1+m_2)\overrightarrow{h_4}+m_3\overrightarrow{g_3}}{(m_1+m_2)+m_3}\\&=\frac{(m_1+m_2)\dfrac{m_1\overrightarrow{g_1}+m_2\overrightarrow{g_2}}{m_1+m_2}+m_3\overrightarrow{g_3}}{m_1+m_2+m_3}\\&=\frac{m_1\overrightarrow{g_1}+m_2\overrightarrow{g_2}+m_3\overrightarrow{g_3}}{m_1+m_2+m_3}\end{aligned}$$

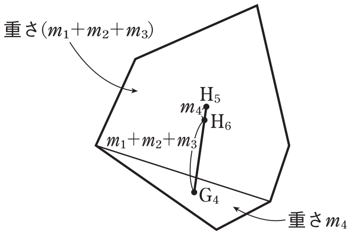
である。



六角形の重心 $H_6(\overrightarrow{h_6})$ は，五角形の重心と三角形の重心を結ぶ線分を $m_4:(m_1+m_2+m_3)$ に内分した点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_6}&=\frac{(m_1+m_2+m_3)\overrightarrow{h_5}+m_4\overrightarrow{g_4}}{(m_1+m_2+m_3)+m_4}\\&=\frac{(m_1+m_2+m_3)\dfrac{m_1\overrightarrow{g_1}+m_2\overrightarrow{g_2}+m_3\overrightarrow{g_3}}{m_1+m_2+m_3}+m_4\overrightarrow{g_4}}{m_1+m_2+m_3+m_4}\\&=\frac{m_1\overrightarrow{g_1}+m_2\overrightarrow{g_2}+m_3\overrightarrow{g_3}+m_4\overrightarrow{g_4}}{m_1+m_2+m_3+m_4}\end{aligned}$$

である。



以下，同様にして，n 角形の重心 $\mathrm{H}_n(\overrightarrow{h_n})$ が

$\overrightarrow{h_n}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n-2} m_k\overrightarrow{g_k}}{\sum_{k=1}^{n-2} m_k}$ であることが分かる。

また，

$$
\begin{aligned}
&m_1\overrightarrow{\mathrm{H}_n\mathrm{G}_1}+m_2\overrightarrow{\mathrm{H}_n\mathrm{G}_2}+m_3\overrightarrow{\mathrm{H}_n\mathrm{G}_3}+\cdots+m_{n-2}\overrightarrow{\mathrm{H}_n\mathrm{G}_{n-2}}\\
&=m_1(\overrightarrow{g_1}-\overrightarrow{h_n})+m_2(\overrightarrow{g_2}-\overrightarrow{h_n})+m_3(\overrightarrow{g_3}-\overrightarrow{h_n})\\
&\qquad+\cdots+m_{n-2}(\overrightarrow{g_{n-2}}-\overrightarrow{h_n})\\
&=\sum_{k=1}^{n-2} m_k\overrightarrow{g_k}-\left(\sum_{k=1}^{n-2} m_k\right)\overrightarrow{h_n}\\
&=\vec{0}
\end{aligned}
$$

より，$\mathrm{H}_n(\overrightarrow{h_n})$ が n 角形の重心であることが直観的にもよく分かる。

§3. おわりに

誤答例が加重平均を考えるきっかけとなり，n 角形まで一般化して重心を簡単に求められることが分かった。正答より誤答の方が数多く出たが，通常の問題を解くときと異なり，様々なアイデアを出し合え，考える楽しみを味わえる時間となったように思う。一般化については授業内では出来ず事後にフィードバックした。

《参考文献》

〔1〕 秋山仁著「作って試して納得数学　第２集
－発見的高校数学入門－」

(岡山県立岡山一宮高等学校)