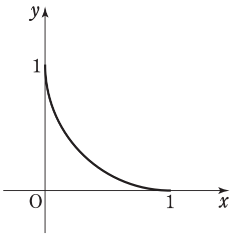
単位四分円に最も近い放物線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

伊藤（いとう） 亘央（のぶお）

§1. 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

半径1の円の周を4等分し，そのうちの1つを“単位四分円”と呼ぶこととする。

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は単位四分円のように見える。



この曲線が，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ の部分とまるで一致しているかのように似ているが，実際には微妙に異なることをまずは確かめたい。

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は

$y=(1-\sqrt{x})^2=1+x-2\sqrt{x}\ (0\leqq x\leqq 1)$ と同値。

$(x-1)^2+(y-1)^2=1\ (0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$ は

$y=1-\sqrt{1-(x-1)^2}=1-\sqrt{2x-x^2}\ (0\leqq x\leqq 1)$ と同値。

そこで，

$f(x)=1+x-2\sqrt{x}$，$g(x)=1-\sqrt{2x-x^2}$

$F(x)=f(x)-g(x)$ とおく。

$F(x)=x-2\sqrt{x}+\sqrt{2x-x^2}$ の符号を確かめるために $(x+\sqrt{2x-x^2})^2$ と $(2\sqrt{x})^2$ を比較する。

$$(x+\sqrt{2x-x^2})^2-(2\sqrt{x})^2=2x\sqrt{2x-x^2}-2x$$
$$=2x(\sqrt{2x-x^2}-1)$$

$0\leqq x\leqq 1$ で $2x-x^2\leqq 1$（等号は $x=1$ のとき）より

$\sqrt{2x-x^2}-1\leqq 0$（等号は $x=1$ のとき）となるから，

$$(x+\sqrt{2x-x^2})^2-(2\sqrt{x})^2\leqq 0$$

（等号は $x=0$，1 のとき）

$x+\sqrt{2x-x^2}\geqq 0$，$2\sqrt{x}\geqq 0$ より

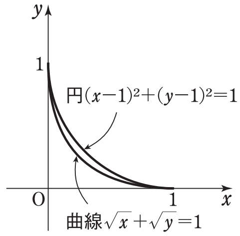
$$x+\sqrt{2x-x^2}\leqq 2\sqrt{x}$$

これは $F(x)\leqq 0$ と同値である。

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ で，$f(x)\leqq g(x)$

（等号は $x=0$，1 のとき）

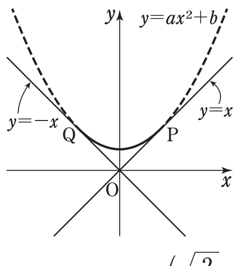
以上より，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の方が，単位四分円よりも平均曲率がやや大きいことが分かる。



§2. 単位四分円に最も近い放物線

放物線の頂点の付近は円周の一部によく似ている。そこで単位四分円にできるだけ近い放物線を追求したい。

2次関数 $y=ax^2+b$ の放物線が，直線 $y=x$ と点Pで，直線 $y=-x$ と点Qで接し，OP=OQ=1 とする。



このとき，P，Q の座標は，$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となるが，この放物線の区間 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$ の部分も，点 $(0,\ \sqrt{2})$ を中心とする単位四分円にかなり近い。これを“単位四分円に最も近い放物線”と定義し，定数 a，b を求める。

$y=ax^2+b$ より $y'=2ax$ で，P における微分係数が 1 であるから，$2a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$ より $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を通るから，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+b$ に代入して $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+b$ より $b=\frac{\sqrt{2}}{4}$

したがって，方程式は $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$ である。

以上で得た“単位四分円に最も近い放物線”

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を C とする。

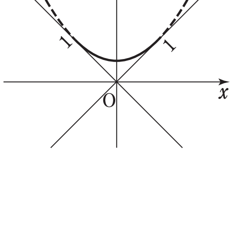
§3. 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と C の比較

放物線 $C：y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ を曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と比較する。具体的には，C を，原点を中心に $-45°$ だけ回転させて，点 P，Q が各々$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ に移動した曲線の方程式を追求する。

そのために，x 軸，y 軸を 45° だけ回転させた位置に各々 s 軸，t 軸をもつ st 平面上に C が描かれている形で座標変換を施し，C を s，t で表す。この場合，ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ が st 平面における基本ベクトル(正規直交基) になるから，点 $(x,\ y)$ と点 $(s,\ t)$ が同一点とすると，

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ である。よって，この座標変換の式は

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}$ である。



ここで，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}s-\frac{\sqrt{2}}{2}t$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}s+\frac{\sqrt{2}}{2}t$ を $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$ に代入して

$$\frac{\sqrt{2}}{2}s+\frac{\sqrt{2}}{2}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

これを整理すると，

$$(s+t-1)^2=4st$$

st 平面において C は $0\leqq s\leqq1$，$0\leqq t\leqq1$，$t\leqq-s+1$ の領域にあるから両辺の平方根をとると

$$s+t-1=-2\sqrt{st}$$

これより，$(\sqrt{s}+\sqrt{t})^2=1$

明らかに $\sqrt{s}+\sqrt{t}\geqq0$ であるから，

$\sqrt{s}+\sqrt{t}=1$ である。

したがって，$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ が正規直交基であることと，得られた C の方程式 $\sqrt{s}+\sqrt{t}=1$ の形から明らかに C は曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と同一曲線であることが分かる。

ちなみに，逆の追求方法もあり，x 軸，y 軸を $-45°$ だけ回転させた位置に各々 u 軸，v 軸をもつ uv 平面上に曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ が描かれていると考え直し，これを u，v で表して，

$$v=\frac{\sqrt{2}}{2}u^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq u\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

を得るということもできる。

§4. 単位四分円に最も近い放物線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ は“単位四分円に最も近い放物線” $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ と同一曲線である。また，方程式の形が 2 次ではないのに 2 次曲線 (放物線) を表すというのも意外である。

《参考文献》

〔1〕 詳解 微積分演習Ⅰ，福田安蔵・鈴木七緒・安岡善則・黒崎千代子 共編，共立出版

(愛知県　名古屋国際中学校・高等学校)