生徒の誤答から学ぶ
～誤った解法の解と正しい解法の解が一致する指数方程式～

にしもと　のりよし
西元　教善

§1. はじめに

指数方程式 $4^x=2^{x+1}$ を解くには，底をそろえて $2^{2x}=2^{x+1}$ として，指数関数 $y=2^x$ が1対1の関数であることから $2x=x+1$ となり，これを解けばよい。このようなタイプの指数方程式の場合には，両辺の底をそろえてその指数が等しいとしたときの方程式を解けばよい。

次に，指数方程式 $4^x-2^x-2=0$ の場合は，$(2^x)^2-2^x-2=0$ と変形し，$t=2^x$ とおくことで $t^2-t-2=0$ となるから $(t+1)(t-2)=0$，指数関数の値域は正の実数全体より $t>0$ であるから

$t=2$

よって，$2^x=2=2^1$ となり，$x=1$ が解となる。

これを $2^{2x}-2^x-2^1=0$ より $2x-x-1=0$ として，これを解いて $x=1$ と答えた生徒がいた。他にテストの解答の中にも見つけた。

指数方程式 $4^x=2^{x+1}$ を解くときと同様に底をそろえ，$2^{2x}-2^x-2^1=0$ として，指数と符号に着目して $2x-x-1=0$ という方程式を作って解いたというのである。答えも正しい解法による答えと一致するため，これに味を占めて他の問題も解いているようであった。

このように誤った解法で解いたとき，偶然に正しい解法で解いたときの正解と一致したのであるが，このように誤った解法でも正解に一致するのはどのような指数方程式なのかについて興味が湧いたので考察してみた。

§2. 誤った解法の解と正しい解法の解が一致する例

他にもこのような指数方程式がある。たとえば $2\cdot4^x-2^{x+2}+2=0$ である。

正しい解法

$2\cdot4^x-2^{x+2}+2=0$ を変形して，$(2^x)^2-2\cdot2^x+1=0$
ここで $t=2^x$ とおくと $t>0$ で，$t^2-2t+1=0$ である。すると，$(t-1)^2=0$ となるので $t=1$
これは $t>0$ に適する。
よって，$2^x=1=2^0$ より $x=0$ である。

誤った解法

$2\cdot4^x-2^{x+2}+2=0$ を変形して，$2^{2x+1}-2^{x+2}+2^1=0$
よって，$2x+1-(x+2)+1=0$（当然ながら，ここが誤っているのであるが）より $x=0$ である。

ここで，§1. で扱った指数方程式
$4^x-2^x-2=0$ ……① とここで扱った指数方程式
$2\cdot4^x-2^{x+2}+2=0$ ……② について考察してみる。

①と②での誤った解法に共通することは，x の1次方程式になることである。したがって，解は1つである。

一方，正しい解法では $t=2^x$ とおくことで t の2次方程式になる。よって，誤った解法の解と正しい解法の解が一致するのは，正の解を1つだけもつときである。つまり，「正の解1つと0以下の解を1つもつ」または「正の重解をもつ」ときである。なお，①は前者の場合，②は後者の場合である。

§3. 誤った解法の解と正しい解法の解が一致する条件

§2. では具体例を挙げたが，ここでは一般に，誤った解法の解と正しい解法の解が一致する条件について考察する。

①は $2^{2x}-2^x-2^1=0$，②は $2^{2x+1}-2^{x+2}+2^1=0$ と表される。また，$t=2^x$ とおくとそれぞれ
$t^2-t-2=0$，$2t^2-4t+2=0$ である。

そこで，一般に a，b，c を整数として，それぞれ $2^a t^2-2^b t-2^c=0$，$2^a t^2-2^b t+2^c=0$ と表される，つまり，$2^{2x+a}-2^{x+b}-2^c=0$，$2^{2x+a}-2^{x+b}+2^c=0$ と表される場合を考えることにする。

前者をタイプ 1，後者をタイプ 2 として，タイプ別に考察しよう。

タイプ 1 $\boldsymbol{2^{2x+a}-2^{x+b}-2^c=0}$ **（a，b，c は整数）型**

誤った解法で解くと，$2^{2x+a}-2^{x+b}-2^c=0$ より

$$2x+a-(x+b)-c=0$$

これを解いて，$x=-a+b+c$

これが，正しい解法での解になるように整数 a，b，c の条件を定める。

$2^{2x+a}-2^{x+b}-2^c=0$ は両辺を $2^a\,(\neq 0)$ で割ると，$2^{2x}-2^{x-a+b}-2^{c-a}=0$ となる。

ここで，$t=2^x$ とおくと $t>0$ で，$t^2-2^{b-a}t-2^{c-a}=0$ ……① である。

①の判別式を D とすると

$$D=(2^{b-a})^2+4\cdot 2^{c-a}=2^{-2a+2b}+2^{-a+c+2}>0$$

であり，t^2 の係数 $1>0$，定数項 $-2^{c-a}<0$ より，異符号の解をもつ。それらを α，$\beta\,(\alpha<0<\beta)$ とすると，$2^x=\beta$ である。

$x=-a+b+c$ が解になるようにすることから，$\beta=2^{-a+b+c}$ である。

また，解と係数の関係から，$\alpha+\beta=2^{b-a}$，$\alpha\beta=-2^{c-a}$ であるから，$\alpha+\beta=2^{b-a}$ より $\alpha=2^{b-a}-2^{-a+b+c}=2^{b-a}(1-2^c)=-2^{b-a}(2^c-1)$，$\alpha\beta=-2^{c-a}$ より $\alpha=-2^{c-a}\cdot 2^{a-b-c}=-2^{-b}$ である。

よって　$-2^{b-a}(2^c-1)=-2^{-b}$　つまり $2^{2b-a}(2^c-1)=1$ である。

すると，$2^c-1=2^{a-2b}$ より　$2^c-2^{a-2b}=1$

a，b，c は整数であるから，$a-2b$ も整数である。

$2^m-2^n=1$（m，n は整数）$\Longleftrightarrow$ $m=1$，$n=0$ であるから $c=1$，$a-2b=0$ つまり $a=2b$，$c=1$

このとき，$x=-a+b+c=-2b+b+1=-b+1$ である。

また，$2^{2x+a}-2^{x+b}-2^c=0$（a，b，c は整数）は，$2^{2x+2b}-2^{x+b}-2=0$（b は整数）となる。

◆$\boldsymbol{2^{2x+2b}-2^{x+b}-2=0}$（$b$ は整数）は誤った解法での解と正しい解法での解が一致することの確認

では，$2^{2x+2b}-2^{x+b}-2=0$（b は整数）は，誤った解法での解と正しい解法での解が一致することを確認してみよう。

誤った解法

$2^{2x+2b}-2^{x+b}-2^1=0$ より

$$2x+2b-(x+b)-1=0$$

よって，$x=-b+1$ である。

正しい解法

$2^{2x+2b}-2^{x+b}-2=0$ より　$(2^{x+b})^2-2^{x+b}-2=0$

ここで，$t=2^{x+b}$ とおくと，$t>0$ で，$t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ で，$t>0$ であることから，$t=2$

よって $2^{x+b}=2=2^1$ つまり $x+b=1$

したがって $x=-b+1$ である。

確かに，このとき誤った解法での解と正しい解法での解は一致する。

具体例

$4^x-2^x-2=0$（$b=0$ のとき）以外の方程式には，次のようなものがある。

① $2^{2x+2}-2^{x+1}-2=0$（$b=1$ のとき）　つまり $4^{x+1}-2\cdot 2^x-2=0$　このとき解は $x=0$

なお，方程式 $4^{x+1}-2\cdot 2^x-2=0$ は，$4\cdot 2^{2x}-2^{x+1}-2=0$ とか $2\cdot 2^{2x+1}-2^{x+1}-2=0$ とかのように，目先を変えられる。

② $2^{2x+4}-2^{x+2}-2=0$（$b=2$ のとき）　つまり $4^{x+2}-4\cdot 2^x-2=0$　このとき解は $x=-1$

なお，方程式 $2^{2x+4}-2^{x+2}-2=0$ は，$16\cdot 2^{2x}-2^{x+2}-2=0$ とか $8\cdot 2^{2x+1}-2^{x+2}-2=0$ とかのように，目先を変えられる。

タイプ 2 $\boldsymbol{2^{2x+a}-2^{x+b}+2^c=0}$ **（a，b，c は整数）型**

誤った解法で解くと，$2^{2x+a}-2^{x+b}+2^c=0$ より

$$2x+a-(x+b)+c=0$$

これを解いて　$x=-a+b-c$

これが，正しい解法での解になるように a，b，c の条件を定める。

$2^{2x+a}-2^{x+b}+2^c=0$ は両辺を $2^a\,(\neq 0)$ で割ると，$2^{2x}-2^{x-a+b}+2^{c-a}=0$ となる。

ここで $t=2^x$ とおくと，$t>0$ で，$t^2-2^{b-a}t+2^{c-a}=0$ ……② である。

②の判別式を D とすると，

$$D=(2^{b-a})^2-4\cdot 2^{c-a}=2^{-2a+2b}-2^{-a+c+2}$$

であるから，$-2a+2b=-a+c+2$　つまり $-a+2b-c=2$ のとき，$D=0$ となり②は重解をもつ。

このときの重解は $t=-\dfrac{-2^{b-a}}{2}=2^{-a+b-1}$ である。

よって，$2^x=2^{-a+b-1}$ より $x=-a+b-1$ である。

すると，誤った解法での解 $x=-a+b-c$ と一致するためには，$c=1$ でなければならない。

$-a+2b-c=2$ より $-a+2b-1=2$　つまり $a=2b-3$ である。

よって，$a=2b-3$，$c=1$ であればよい。

このとき $x=-(2b-3)+b-1=-b+2$ である。

◆$2^{2x+2b-3}-2^{x+b}+2=0$（b は整数）は誤った解法での解と正しい解法での解が一致することの確認

では，$2^{2x+2b-3}-2^{x+b}+2=0$（b は整数）は誤った解法での解と正しい解法での解が一致することを確認してみよう。

誤った解法

$2^{2x+2b-3}-2^{x+b}+2^1=0$ より

$$2x+2b-3-(x+b)+1=0$$

よって　$x=-b+2$

正しい解法

$2^{2x+2b-3}-2^{x+b}+2=0$ より

$$2(2^{x+b-2})^2-4\cdot 2^{x+b-2}+2=0$$

つまり　$(2^{x+b-2})^2-2\cdot 2^{x+b-2}+1=0$

よって　$(2^{x+b-2}-1)^2=0$

したがって，$2^{x+b-2}=1=2^0$ となり $x+b-2=0$

つまり $x=-b+2$ である。

確かに，このとき，誤った解法での解と正しい解法での解は一致する。

具体例

$2^{2x+1}-2^{x+2}+2=0$（$b=2$）以外の方程式には，次のようなものがある。

① $2^{2x-1}-2^{x+1}+2=0$（$b=1$ のとき）　つまり $2^{2x-1}-2\cdot 2^x+2=0$　このとき解は $x=1$

② $2^{2x+3}-2^{x+3}+2=0$（$b=3$ のとき）　このとき解は $x=-1$

§4．まとめ

生徒は時にとんでもない（都合のよい）解釈をすることがあるが，その原因は何か，そのとんでもない解釈でも答えが偶然正解になってしまうのはどういう場合なのかを考えさせせると，その是正はもちろんのこと，その周辺の内容の理解も深まる。

失敗を恥と思わせず，ユニークな発想であると認めつつも，その正しい理解とより深い理解を求められる指導を心掛けたい。

次のような問題を生徒に考えさせてみるとよい。

問題　A君は指数方程式 $4^x-2^x-2=0$ を $2^{2x}-2^x-2^1=0$ と変形し，指数と符号に着目し，$2x-x-1=0$ として $x=1$ という解を得ました。あなたはA君のこの解法をどう思いますか。

正しいと思う人 $\Longrightarrow$ この解法で $4^x-2\cdot 2^{x+1}+4=0$ を解きなさい。それは本当に解ですか？

誤りと思う人 $\Longrightarrow$ 正しいと思う方法で解きなさい。

他にもあなたが正しいと思う解法で解いた解と誤りと思う解法で解いた解が一致するような指数方程式を作ってみなさい。

（山口県立岩国高等学校）