# 数研通信 No.81 掲載の「円周角の定理」へ補足

かみや　ただし
神谷　正

## §1. はじめに

数研通信 No.81 に掲載されている「円周角の定理とその逆の解析的証明」の，「円周角の定理」について補足をする。

## §2. 「円周角の定理」を座標平面で証明

**命題 1**　2 点 A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ を通る直線の方程式は

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

である。

**証明**　$\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=1$ より

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\neq(0,\ 0)$$

ゆえに，方程式

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

は直線の方程式である。

$(x,\ y)=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ のとき

$$\begin{aligned}&x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\cos\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\cos\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

$(x,\ y)=(\cos\beta,\ \sin\beta)$ のとき

$$\begin{aligned}&x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\cos\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\cos\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\\&=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

したがって，方程式

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

は，2 点 A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ を通る直線の方程式である。終

**命題 2**　単位円周上の異なる 4 点 A，B，P，Q に対し，A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$，P$(\cos p,\ \sin p)$，Q$(\cos q,\ \sin q)$ とおく。2 点 P，Q が，直線 AB に関して同じ側にある必要十分条件は，

$$\sin\frac{p-\alpha}{2}\sin\frac{p-\beta}{2}\sin\frac{q-\alpha}{2}\sin\frac{q-\beta}{2}>0$$

である。

**証明**

$$f(x,\ y)=x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

とおくと，命題 1 より，直線 AB の方程式は

$$f(x,\ y)=0$$

である。

ゆえに，2 点 P，Q が，直線 AB に関して同じ側にある必要十分条件は，

$$f(\cos p,\ \sin p)\cdot f(\cos q,\ \sin q)>0$$

である。

$$\begin{aligned}&f(\cos p,\ \sin p)\\&=\cos p\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin p\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=\cos\left(p-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=-2\sin\frac{\left(p-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\\&\qquad\times\sin\frac{\left(p-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\\&=-2\sin\frac{p-\beta}{2}\sin\frac{p-\alpha}{2}\end{aligned}$$

同様に　$f(\cos q,\ \sin q)=-2\sin\frac{q-\beta}{2}\sin\frac{q-\alpha}{2}$

ゆえに　$f(\cos p,\ \sin p)\cdot f(\cos q,\ \sin q)>0$

$$\iff \left(-2\sin\frac{p-\alpha}{2}\sin\frac{p-\beta}{2}\right)\times\left(-2\sin\frac{q-\alpha}{2}\sin\frac{q-\beta}{2}\right)>0$$

$$\iff \sin\frac{p-\alpha}{2}\sin\frac{p-\beta}{2}\sin\frac{q-\alpha}{2}\sin\frac{q-\beta}{2}>0$$

終

**命題 3**　単位円周上の異なる 3 点 A，B，P に対し，A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$，P$(\cos p,\ \sin p)$ とおくと，

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha-p}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha-p}{2}\right|}\cdot\frac{\sin\frac{\beta-p}{2}}{\left|\sin\frac{\beta-p}{2}\right|}$$

である。

**証明**　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(\cos\alpha-\cos p,\ \sin\alpha-\sin p)$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\cos\beta-\cos p,\ \sin\beta-\sin p)$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2&=(\cos\alpha-\cos p)^2+(\sin\alpha-\sin p)^2\\&=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2 p+\sin^2 p)\\&\qquad-2(\cos\alpha\cos p+\sin\alpha\sin p)\\&=2-2\cos(\alpha-p)\\&=4\sin^2\frac{\alpha-p}{2}\end{aligned}$$

同様に　$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=4\sin^2\frac{\beta-p}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(\cos\alpha-\cos p)(\cos\beta-\cos p)\\&\qquad+(\sin\alpha-\sin p)(\sin\beta-\sin p)\\&=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&\qquad-(\cos\alpha\cos p+\sin\alpha\sin p)\\&\qquad-(\cos\beta\cos p+\sin\beta\sin p)\\&\qquad+(\cos^2 p+\sin^2 p)\\&=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-p)\\&\qquad-\cos(\beta-p)+1\\&=\{1+\cos(\alpha-\beta)\}\\&\qquad-\{\cos(\alpha-p)+\cos(\beta-p)\}\\&=2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{(\alpha-p)+(\beta-p)}{2}\\&\qquad\times\cos\frac{(\alpha-p)-(\beta-p)}{2}\\&=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta-2p}{2}\right)\\&=-2\cdot2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta-2p}{2}}{2}\\&\qquad\times\sin\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta-2p}{2}}{2}\\&=-4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-p}{2}\sin\frac{-\beta+p}{2}\\&=4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-p}{2}\sin\frac{\beta-p}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{APB}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\\&=\frac{4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-p}{2}\sin\frac{\beta-p}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha-p}{2}}\sqrt{4\sin^2\frac{\beta-p}{2}}}\\&=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha-p}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha-p}{2}\right|}\cdot\frac{\sin\frac{\beta-p}{2}}{\left|\sin\frac{\beta-p}{2}\right|}\end{aligned}$$

終

**命題 4**　（円周角の定理）　単位円周上の異なる 4 点 A，B，P，Q に対し，2 点 P，Q が，直線 AB に関して同じ側にあるならば，

$$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}$$

である。

**証明**　A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$，P$(\cos p,\ \sin p)$，Q$(\cos q,\ \sin q)$ とおく。

命題 3 より　$|\cos\angle\mathrm{APB}|=\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$

$|\cos\angle\mathrm{AQB}|=\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$

ゆえに　$|\cos\angle\mathrm{APB}|=|\cos\angle\mathrm{AQB}|$　……①

命題 3 より

$$\begin{aligned}&(\cos\angle\mathrm{APB})\times(\cos\angle\mathrm{AQB})\\&=\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\\&\quad\times\frac{\sin\frac{\alpha-p}{2}\sin\frac{\beta-p}{2}\sin\frac{\alpha-q}{2}\sin\frac{\beta-q}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha-p}{2}\sin\frac{\beta-p}{2}\sin\frac{\alpha-q}{2}\sin\frac{\beta-q}{2}\right|}\\&=\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\\&\quad\times\frac{\sin\frac{p-\alpha}{2}\sin\frac{p-\beta}{2}\sin\frac{q-\alpha}{2}\sin\frac{q-\beta}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha-p}{2}\sin\frac{\beta-p}{2}\sin\frac{\alpha-q}{2}\sin\frac{\beta-q}{2}\right|}\end{aligned}$$

この式と命題2より

$$(\cos\angle APB)\times(\cos\angle AQB)\geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$\cos\angle APB=\cos\angle AQB$

ここで，

$$0<\angle APB<180^\circ,\ 0<\angle AQB<180^\circ$$

であるから

$$\angle APB=\angle AQB$$ 終

## §3. 結び

図形問題は，小中学生のように図をかかなくても，「座標平面」や「複素数平面」や「ベクトル」を使って，計算だけで解ける。ただし，この3つのどれで解くのが適切かは，問題により異なる。また，この3つのどれかで式が書けたとしても，その後の計算を進めていくテクニカルなことは，また別の話である。

本稿では，「座標平面」で式を作り，テクニカルな部分には「ベクトル」と「三角関数」を駆使した。

図形問題を計算だけで解くことは，高校生のときに興味を持った。教職についてから経験を積むうちに，自分の中のテクニカルな部分はかなり進んだ。教員採用試験を受ける同僚が持ってきた過去問題を，初等幾何学の有名な定理とも知らず，ベクトルの結構長い計算で解いたこともある。これを，平成16年の第85回全国算数・数学教育研究（愛知）大会での発表原稿の前置きで使用した。

命題3も，以前書き留めておいたものである。ただし，そのときの円周角の定理では，命題4の「2点P，Q」に対する条件を次のように表現していた。単位円周上から2点A，Bを取り除けば，2つの弧状連結な部分集合に分割される。このとき2点P，Qが同じ部分集合に含まれればいいわけであるが，その条件を$\alpha$，$\beta$，$p$，$q$の不等式で表していた。一方本稿では，命題4で「2点P，Qが，直線ABに関して同じ側にある」と表現したが，これは§1の文献に合わせたものである。これ以外に参照したものはない。

《参考文献》

〔1〕 西元教善　円周角の定理とその逆の解析的証明　数研通信 No.81

（愛知県立東海南高等学校）