面白い約分

伊藤　裕（いとう　ゆたか）

§1. はじめに

参考文献の pdf ファイルに，「$\frac{16}{64}$，$\frac{19}{95}$ の約分が面白かった」とあり，何が面白いのか分からなかったので実際に約分をしてみると，$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$，$\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$ となった。この約分を見ると，左辺の分子と分母に現れている共通の数を「消した」分数が，正しく約分をした分数となっており，確かにこれは面白い。このような分数の存在を知ったのは今回が初めてであり，他にどれだけあるのか気になったので，探してみることにした。

§2. 他の例を探す

$\frac{(2\text{桁})}{(2\text{桁})}$ の分数で，$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$ を満たす，自明でないものを探す（$a=b=c$ ならば，左辺＝右辺＝1 で自明）。

a と b は位の先頭の数なので共に 0 でなく，c は分母になっているので 0 でない。すなわち，a，b，c は，少なくとも 1 つは他の 2 つと異なる 1 桁の自然数である。

$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}=1$ となるのは，$a=b=c$ のときのみなので，まず，$\frac{a}{c}>1$ となる場合を考える。

$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$ を整理して，

$$9ac+bc-10ab=0 \quad \cdots\cdots①$$

①より，$(10b-9c)a=bc$ となるが，この式の右辺は正なので，$10b-9c>0$，すなわち，

$$c<\frac{10}{9}b \quad \cdots\cdots②$$

今は，$a>c$ であるので，$a=\frac{bc}{10b-9c}$ をこの不等式に代入すれば，$\frac{bc}{10b-9c}>c$ であり，これを整理して　$b<c$ $\cdots\cdots③$

②と③から，$b<c<\frac{10}{9}b$ となるが，b が 1 桁の自然数であることに注意すると，$\frac{10}{9}b$ と b の差は最大で 1 なので，この不等式を満たす自然数 c は存在しない。よって，$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}>1$ となる分数は存在しない。

次に，$\frac{a}{c}<1$ となる場合を考える。

①より，$b=\frac{9ac}{10a-c}$ であり，$b\leqq 9$ なので

$$\frac{9ac}{10a-c}\leqq 9$$

c について整理して　$c\leqq\frac{10a}{a+1}$ $\cdots\cdots④$

今は，$a<c$ であるので，④と合わせると，結局

$a<c\leqq\frac{10a}{a+1}$ $\cdots\cdots⑤$ となる。

以下，⑤のもとで，$b=\frac{9ac}{10a-c}$ が自然数となる場合をしらみつぶしに探す。

(1)　$a=1$ のとき，⑤から，$1<c\leqq\frac{10}{2}=5$

c	2	3	4	5
b	$\frac{9\cdot2}{10-2}=\frac{9}{4}$	$\frac{9\cdot3}{10-3}=\frac{27}{7}$	$\frac{9\cdot4}{10-4}=6$	$\frac{9\cdot5}{10-5}=9$

表より，$a=1$，$b=6$，$c=4$ のとき，$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$，

$a=1$，$b=9$，$c=5$ のとき，$\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$

(2)　$a=2$ のとき，⑤から，$2<c\leqq\frac{20}{3}=6.6\cdots$

c	3	4	5	6
b	$\frac{18\cdot3}{20-3}=\frac{18\cdot3}{17}$	$\frac{18\cdot4}{20-4}=\frac{9}{2}$	$\frac{18\cdot5}{20-5}=6$	$\frac{18\cdot6}{20-6}=\frac{18\cdot3}{7}$

表より，$a=2$，$b=6$，$c=5$ のとき，$\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$

(3) $a=3$ のとき，⑤から，$3<c\leqq\frac{30}{4}=7.5$

c	4	5	6	7
b	$\frac{27\cdot 4}{30-4}=\frac{27\cdot 2}{13}$	$\frac{27\cdot 5}{30-5}=\frac{27}{5}$	$\frac{27\cdot 6}{30-6}=\frac{27\cdot 3}{4}$	$\frac{27\cdot 7}{30-7}=\frac{27\cdot 7}{23}$

表よりすべて不適。

(4) $a=4$ のとき，⑤から，$4<c\leqq\frac{40}{5}=8$

c	5	6	7	8
b	$\frac{36\cdot 5}{40-5}=\frac{36}{7}$	$\frac{36\cdot 6}{40-6}=\frac{36\cdot 3}{17}$	$\frac{36\cdot 7}{40-7}=\frac{12\cdot 7}{11}$	$\frac{36\cdot 8}{40-8}=9$

表より，$a=4$，$b=9$，$c=8$ のとき，$\frac{49}{98}=\frac{4}{8}$

(5) $a=5$ のとき，⑤から，$5<c\leqq\frac{50}{6}=8.3\cdots$

c	6	7	8
b	$\frac{45\cdot 6}{50-6}=\frac{45\cdot 3}{22}$	$\frac{45\cdot 7}{50-7}=\frac{45\cdot 7}{43}$	$\frac{45\cdot 8}{50-8}=\frac{15\cdot 4}{7}$

表よりすべて不適。

(6) $a=6$ のとき，⑤から，$6<c\leqq\frac{60}{7}=8.5\cdots$

c	7	8
b	$\frac{54\cdot 7}{60-7}=\frac{54\cdot 7}{53}$	$\frac{54\cdot 8}{60-8}=\frac{54\cdot 2}{13}$

表よりすべて不適。

(7) $a=7$ のとき，⑤から，$7<c\leqq\frac{70}{8}=8.75$

c	8
b	$\frac{63\cdot 8}{70-8}=\frac{63\cdot 4}{31}$

表より不適。

(8) $a=8$ のとき，⑤から，$8<c\leqq\frac{80}{9}=8.8\cdots$

これを満たす自然数 c は存在しない。

以上より，自明でない場合は，

$$\frac{16}{64}=\frac{1}{4},\quad \frac{19}{95}=\frac{1}{5},\quad \frac{26}{65}=\frac{2}{5},\quad \frac{49}{98}=\frac{4}{8}$$

の 4 個のみであることが分かった。

上で求めた分数の，分子と分母を入れ替えると，

$$\frac{64}{16}=\frac{4}{1},\quad \frac{95}{19}=\frac{5}{1},\quad \frac{65}{26}=\frac{5}{2},\quad \frac{98}{49}=\frac{8}{4}$$

と，$\frac{10a+b}{10c+a}=\frac{b}{c}$ を満たす分数が 4 個得られる。

分子と分母の入れ替えを考えることにより，$\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$ を満たす分数の個数と，$\frac{10a+b}{10c+a}=\frac{b}{c}$ を満たす分数の個数は同じであることが分かるので，$\frac{10a+b}{10c+a}=\frac{b}{c}$ を満たす自明でない分数は，上の 4 個のみであることも合わせて分かる。

§3. おわりに

最初はすべての場合をしらみつぶしに調べて，上の 4 個を見つけたが，しらみつぶしをする手間を少しでも減らしたかったので，§2 の議論を行った。

この 4 個の分数は，授業中の小ネタなどに活用していきたいと思っている。

《参考文献》

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2014/calcl/20140423.pdf

（神奈川県立市ケ尾高等学校）