交点の位置ベクトルの瞬間的解法

臼井（うすい）　達哉（たつや）

§1. はじめに

> **例題 1**　△OAB において辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 5：2 に内分する点を D とし，線分 BC と AD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

教科書に必ず載っている問題です。計算が面倒なので以前から簡単な解法を模索していましたが，瞬時に解が求められる方法を考えましたので紹介します。まず，よく知られている 3 つの解法の要約です。

【解法 1】

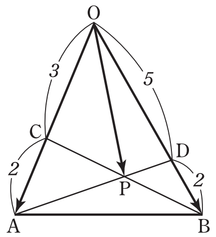
AP：PD$=s:(1-s)$

BP：PC$=t:(1-t)$

とおいて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\vec{a}+\frac{5}{7}s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$



から　$1-s=\frac{3}{5}t$　…①，$\frac{5}{7}s=1-t$　…②

を導き，これから s，t を求める。

【解法 2】　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$　…①とおき，P が 2 直線 AD，BC 上にあることから，

$$x+\frac{7}{5}y=1,\ \frac{5}{3}x+y=1$$

を導き，これから x，y を求める。

【解法 3】　△OAD と直線 BC にメネラウスの定理を適用すると，$\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{2}{7}=1$

これから AP：PD$=7:3$ が分かるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{10}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\overrightarrow{\mathrm{OD}})=\frac{1}{10}\left(3\vec{a}+7\cdot\frac{5}{7}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{10}$$

解法 1・2 の場合，方程式を解く部分を加えると説明抜きの計算だけで 120〜130 文字必要です。

§2. 瞬間的解法

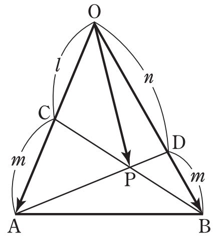
以後簡単のために常に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とします。

> **定理 1**　△OAB において辺 OA を $l:m$ に内分する点を C，辺 OB を $n:m$ に内分する点を D とし，線分 BC と AD の交点を P とすると，
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{l\vec{a}+n\vec{b}}{l+m+n}$$

証明　△OAD と直線 BC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{l}{m}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{m}{m+n}=1$$

ゆえに $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{m+n}{l}$



よって

AP：PD$=(m+n):l$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{l+(m+n)}$$

$$=\frac{l\vec{a}+(m+n)\cdot\frac{n}{m+n}\vec{b}}{l+m+n}=\frac{l\vec{a}+n\vec{b}}{l+m+n}$$

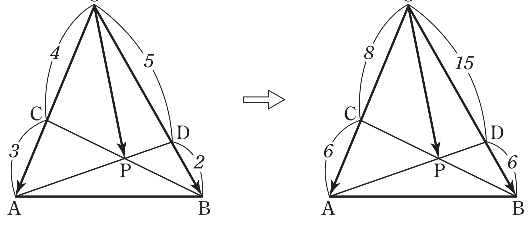
さて次が瞬間的解法です。たった 1 行です。

【解法 4】　定理 1 より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{3+2+5}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{10}$

しかしこのままでは例題 1 のように与えられた比の数値が AC＝BD の場合しか適用できません。

§3. 比の数値が AC≒BD の場合

(1)　OC：CA＝4：3，OD：DB＝5：2 の場合，

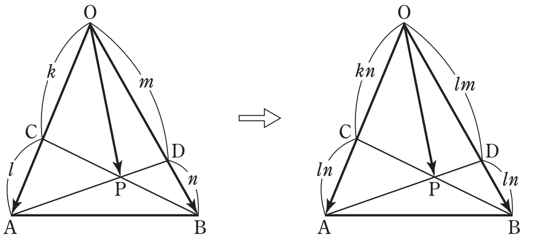


上図のように比を AC＝BD となる数値に書き換えれば定理１より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8\vec{a}+15\vec{b}}{8+6+15}=\frac{8\vec{a}+15\vec{b}}{29}$$

これでどのような線分比が与えられても定理１によって瞬時に解答できます。

(2)　OC：CA＝k：l，OD：DB＝m：n の場合，



上図に定理１を用いると，

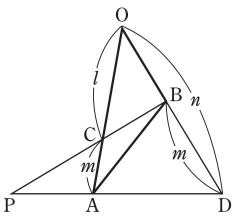
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{kn\vec{a}+lm\vec{b}}{kn+ln+lm}\quad\cdots\text{Ⓐ}$$

§4. 外分点を含む場合

内分の場合だけでも十分実用になると思いますが，外分の場合も調べてみます。

(1)　一方のみが外分点である次の図の場合，

△OAD と直線 BC にメネラウスの定理を用いると



$$\frac{l}{m}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{m}{n-m}=1$$

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{n-m}{l}$$

これから AP：PD＝$(n-m)$：l となり，P が外分点であることに注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{l\vec{a}-(n-m)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{l-(n-m)}$$

$$=\frac{l\vec{a}-(n-m)\cdot\dfrac{n}{n-m}\vec{b}}{l+m-n}=\frac{l\vec{a}-n\vec{b}}{l+m-n}$$

これは，OD：DB＝$-n$：m として，定理１に代入したものと一致します。

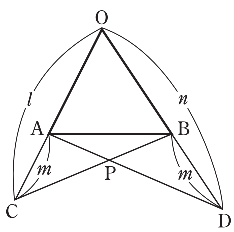
(2)　両方とも外分点である次の図の場合は，同様に計算すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{l\vec{a}+n\vec{b}}{l-m+n}$$

これは，

OC：CA＝l：$(-m)$

OD：DB＝n：$(-m)$



として，定理１に代入したものと一致します。

C，D の対称性を考慮すると３点 C，D，P の位置によって他に５つの場合があります。紙面の都合で説明は省略しますが，どの場合もこれら２つと同じ結果が得られます。

以上から，内分点・外分点の座標の公式と同様の扱いをすれば，定理１は外分の場合も成り立つことが分かりました。

例　定理１の図で OC：CA＝3：2，OD：DB＝5：3 とします。

- C が外分点，D が内分点の場合，
  OC：CA＝(−9)：6，OD：DB＝10：6 として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{-9\vec{a}+10\vec{b}}{-9+6+10}=\frac{-9\vec{a}+10\vec{b}}{7}$$

- C，D ともに外分点の場合，
  OC：CA＝9：(−6)，OD：DB＝10：(−6) として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{9\vec{a}+10\vec{b}}{9-6+10}=\frac{9\vec{a}+10\vec{b}}{13}$$

これらは図をかくのも解法１・２・３で解くのも内分の場合以上に面倒です。

§5. 応用

定理１は正式な解法として使うことはできませんが，図をかいてもかかなくてもほとんど瞬時に解が求められます。

例題１に使ってみます。まず解法１・２において方程式を作った後，それを解かずに定理１より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{10}\quad\cdots\text{Ⓑ}$$

を求めます。解法１なら①または②をⒷと比較すれば s，t はすぐに分かります。解法２なら①とⒷから直接 x，y が分かります。後は，教科書の模範解答にもあるように「これを解くと」と書いておけば，かなり時間とスペースが節約できます。

§6. おわりに

最初Ⓐを考えました。しかしこれは複雑で実用的でないと思い，いろいろ考えているうちに定理１を思いつきました。定理１は覚える手間と計算時間・計算ミスの削減を比較したときの費用対効果の面で優れていると思います。証明も比較的簡単です。しかもこれは必須問題に関する内容ですから，ベクトルを学ぶ生徒が覚えておいて損はないと思います。

(岐阜県立長良高等学校)