# 積和の公式＋和積の公式＝積の和の公式

藤岡（ふじおか）　優太（まさと）

## §1. cos の積の和

$\cos x$，$\cos y$，$\cos z$，$\cos w$ の積の和

$\cos x\cdot\cos y+\cos z\cdot\cos w$ に対し，積和の公式と和積の公式を続けて用いることで

☆　$\cos x\cdot\cos y+\cos z\cdot\cos w$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\}$$
$$+\frac{1}{2}\{\cos(z+w)+\cos(z-w)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(z+w)\}$$
$$+\frac{1}{2}\{\cos(x-y)+\cos(z-w)\}$$
$$=\cos\left\{\frac{(x+y)+(z+w)}{2}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(x+y)-(z+w)}{2}\right\}$$
$$+\cos\left\{\frac{(x-y)+(z-w)}{2}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(x-y)-(z-w)}{2}\right\}\quad ★$$

がわかります。両辺を見比べてみると，形はともに

cos○・cos□＋cos△・cos◇

＝cos●・cos■＋cos▲・cos◆

と cos の積の和の形をしており，違いは角のみです。ここで，$\dfrac{A+B}{2}$，$\dfrac{A-B}{2}$ をそれぞれ $A$ と $B$ の和平均，差平均ということにすると，両辺の角の関係は

〈右辺前項の角

＝左辺前項と後項の角の和の和平均，差平均〉

《右辺後項の角

＝左辺前項と後項の角の差の和平均，差平均》

となっており，特徴をつかめれば覚えやすいものとなっています。

この☆★で例えば $\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\beta \\ w=\pi \end{cases}$ とすれば

$$\cos\alpha-\cos\beta$$
$$=\cos\left\{\frac{(\alpha+0)+(\beta+\pi)}{2}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(\alpha+0)-(\beta+\pi)}{2}\right\}$$
$$+\cos\left\{\frac{(\alpha-0)+(\beta-\pi)}{2}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(\alpha-0)-(\beta-\pi)}{2}\right\}$$
$$=-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left\{-\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\}$$
$$=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

と和積の公式が得られます。

また $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\dfrac{\pi}{2}-\beta \\ z=\alpha \\ w=\dfrac{\pi}{2}-\beta \end{cases}$ とすれば

$$\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$
$$=\cos\left\{\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right\}\cdot\cos 0+\cos\left\{\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right\}\cdot\cos 0$$

から

$$2\cos\alpha\cdot\sin\beta=-\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$$ より

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

と積和の公式が得られます。

結局☆★のみ覚えておけば積和の公式であれ和積の公式であれ，導きたい式の形に応じて $x$，$y$，$z$，$w$ に何を代入するかのみ考えれば簡単に導き出すことができます。

☆★は結構便利な公式かもしれません。

## §2. トレミーの定理

さらに，特に $x+y+z+w=\pi$ である場合は

$\cos\left\{\dfrac{(x+y)+(z+w)}{2}\right\}=0$ から

$$\begin{aligned}&\cos x\cdot\cos y+\cos z\cdot\cos w\\&=\cos\left\{\frac{(x-y)+(z-w)}{2}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(x-y)-(z-w)}{2}\right\}\\&=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(y+w)\right\}\cdot\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(y+z)\right\}\\&=\sin(y+w)\cdot\sin(y+z)\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

が成り立ちます。

そこで $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ である $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$ を考え

$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\\ y=\dfrac{\pi}{2}-\beta\\ z=\dfrac{\pi}{2}-\gamma\\ w=\dfrac{\pi}{2}-\delta\end{cases}$ とすると $x+y+z+w=\pi$ であること

から $(*)$ を用いて

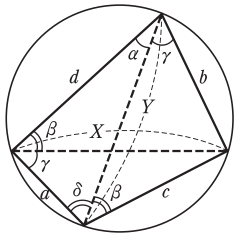
$$\begin{aligned}&\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\gamma\cdot\sin\delta\\&=\sin\{\pi-(\beta+\delta)\}\cdot\sin\{\pi-(\beta+\gamma)\}\\&=\sin(\beta+\delta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\end{aligned}$$

であることがわかります。

このことから

$$\begin{aligned}&2r\sin\alpha\cdot2r\sin\beta+2r\sin\gamma\cdot2r\sin\delta\\&=2r\sin(\beta+\delta)\cdot2r\sin(\beta+\gamma)\end{aligned}$$

であり，右図の半径 $r$ の円に内接する四角形を考え正弦定理を用いると




$$a\cdot b+c\cdot d=X\cdot Y$$

であることがわかります。

つまり☆★の公式から簡単にトレミーの定理が確認できたわけです。

**《参考文献》**


〔1〕 eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/bitstream/2115/13596/1/13_p101-122.pdf


（高知県　土佐高等学校）