4次方程式の解法

森島　充（もりしま　みつる）

§1. はじめに

因数分解の公式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

の右辺を複素数の範囲でもう一度因数分解すると，

$$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

となります。

10年ほど前のことですが，当時同じ学校に勤めていた佐々木正敏先生に，これが3次方程式の解法に使われているということを教わりました。

以来，4次方程式も同じ方向で簡単に解けないのだろうか，ということが気になっていましたが，今回自己流で考えてみることにしました。

§2. 3次方程式の解法

最初に，上記の因数分解を用いた3次方程式の解法を確認します。

まず，上記の式を使いやすいように書き変えます。

$$x^3-3ABx+A^3+B^3$$
$$=(x+A+B)(x+\omega A+\omega^2 B)(x+\omega^2 A+\omega B)$$

一方，任意の3次方程式は適当な変換を用いて，

$$x^3+px+q=0$$

と変形できます。したがって，

$$\begin{cases} p=-3AB \\ q=A^3+B^3 \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす A，B が求まれば，解は

$$x=-A-B,\ -\omega A-\omega^2 B,\ -\omega^2 A-\omega B$$

となります。①より，

$$\begin{cases} A^3+B^3=q \\ A^3B^3=-\dfrac{1}{27}p^3 \end{cases}$$

ですから，A^3 と B^3 の値を t の2次方程式

$$t^2-qt-\frac{1}{27}p^3=0$$

を用いて求めて，3乗根をとれば A，B が求まります。ただし，3乗根は3個ずつあるので，①の第1式を満たすペアにしておきます。

§3. 2次方程式の解法

次に，3次方程式と同じ観点から2次方程式を見てみましょう。

任意の2次方程式は，適当な変換を用いて，

$$x^2+p=0$$

と変形できます。一方，

$$x^2-A^2=(x+A)(x-A)$$

ですから

$$p=-A^2 \quad \text{すなわち} \quad A^2=-p$$

を満たす A を平方根で求めれば，解は

$$x=-A,\ A$$

です。

§4. 方針

4次方程式の解法を考えるために，§2. §3. を参考にして次のような方針を立てました。

a．A，B，C 3つの文字を用いた x の1次式の積を利用すること。

b．その展開式は3次の項が消えていること。

c．x の1次式の積とその展開式の係数は，文字 A，B，C の対称式になっていること。

d．展開式の係数と元の4次方程式の係数から，3元連立方程式を作り，解と係数の関係から3次方程式に帰着させること。

e．文字 A，B，C の係数は，1の4乗根，すなわち1，i，-1，$-i$ を用いること。

方針a～cは，3次方程式に帰着させるためには「はずせない条件」だと思います。方針dは，単に文字を減らすことだけが目的ではなく，3次方程式の解と係数の関係を用いるには，比較する係数が3つでなければならないという必然です。

方針 e は，3 次方程式と 2 次方程式の解法で，係数として，1 の 3 乗根と 1 の平方根を用いたことからの予想です。

以上の方針で試行錯誤した結果が次の解法です。

§5. 4 次方程式の解法

任意の 4 次方程式は適当な変換によって，

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

と変形出来ます。

一方，x の 4 つの 1 次式の積

$$(x+A+B+C)(x+A-B-C)\times(x-A+B-C)(x-A-B+C)$$

を展開すると，

$$x^4+(-2A^2-2B^2-2C^2)x^2+8ABCx+A^4+B^4+C^4-2A^2B^2-2B^2C^2-2C^2A^2$$

となります。したがって，

$$\begin{cases} p=-2A^2-2B^2-2C^2 \\ q=8ABC \\ r=A^4+B^4+C^4-2A^2B^2-2B^2C^2-2C^2A^2 \end{cases} \quad \cdots②$$

を満たす A，B，C が求まれば，解は

$$x=-A-B-C,\ -A+B+C,\ A-B+C,\ A+B-C$$

となります。②より，

$$\begin{cases} A^2+B^2+C^2=-\dfrac{1}{2}p \\ A^2B^2+B^2C^2+C^2A^2=\dfrac{1}{16}p^2-\dfrac{1}{4}r \\ A^2B^2C^2=\dfrac{1}{64}q^2 \end{cases}$$

ですから，A^2，B^2，C^2 の値を t の 3 次方程式

$$t^3+\frac{1}{2}pt^2+\left(\frac{1}{16}p^2-\frac{1}{4}r\right)t-\frac{1}{64}q^2=0$$

を用いて求めて，平方根をとれば A，B，C が求まります。ただし，平方根は 2 個ずつあるので，②の第 2 式を満たす組み合わせにしておきます。

§6. 補足

4 次方程式の解法を考えるにあたって，次のような表を作りました。

A
1
-1

A	B
1	1
ω	ω^2
ω^2	ω

A	B	C
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

それぞれ，2 次，3 次，4 次方程式で用いた 1 次式の積の中にある係数です。

実は 4 次方程式では当初，方針 e に従って次の③のような係数を考えていました。3 次方程式で用いた係数からの類推です。

A	B	C
1	1	1
i	-1	$-i$
-1	1	-1
$-i$	-1	i

……③

しかし，展開すると 3 次の項は消えるものの，それ以外は思わしくありません。

改めて，方針 a ～ c に沿って解くのに必要と思われる係数の条件を，この表で整理すると次のようになります。

f． x の 3 次の項が消えるためには，表の列の和が 0 であること。
g． 対称式であるためには，列を入れ替えたとき，行の入れ替えによって元に戻ること。

条件 g の理由は，列の入れ替えが文字 A，B，C の入れ替えにあたり，行の入れ替えが 1 次式の積の順序の入れ替えにあたるからです。

③は条件 f しか満たしていません。係数の配置をいろいろ変えてみてもだめでした。結局「はずせない条件」である方針 a ～ c を優先して，係数に i を使うのをやめたところ，突然解けました。

方針 d で 3 次方程式に帰着させるには，②が単に対称式になっているだけではだめで，さらにそこから次数をそろえた A^k，B^k，C^k の基本対称式を作らなければなりません。そこが難しいだろうと思っていたので驚きました。まるで答えが待っていたかのようです。

なぜ突然解けたのでしょうか。A，B，C の係数とその表にはどんな意味があるのでしょうか。やはりここを理解しないことには，本当に解いたとは言えないのかもしれません。

《参考文献》

高木貞治『代数学講義』共立出版

（東京都立調布南高等学校）