二項定理から考える作問の工夫

中出(なかで)　公平(こうへい)

§1. はじめに

二項定理は数Ⅰの授業で $(a+b)^3$ の展開式を紹介する際にクラスの状況に応じて $(a+b)^n$ の一般形の予想やパスカルの三角形で規則性や対称性の美しさに触れさせ，数Ⅱの授業で数Aで学んだ組合せをふまえて指導することが最近の私の教科指導の流れです。

しかし，私の教材研究の未熟さからか二項定理は代数的処理の美しさがあるにも関わらず，限られた授業時間の制約や入試問題に用いられる頻度を頭の中で天秤にかけてしまい毎回雑駁に紹介してしまいます。

さらに，数学Bで数学的帰納法を学べば多少の二項定理絡みの問題は対応できるかなといういい加減な見通しを立ててしまい，毎年振り返ると反省してしまいます。

§2. 二項定理の問題の分類

私が考える二項定理の問題の傾向は4つに大別できるような気がします。入試問題の解答は省略致しますが，

(i)　**展開式における項の係数を求める問題**

> $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項の係数を求めよ。　(15 福岡教育大学)

(ii)　**等式，不等式の処理**

> n を自然数とするとき，不等式 $3^n>n^2$ を示せ。　(15 津田塾大学)

(iii)　**剰余の問題**

> k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。
> (1)　2^k を7で割った余りが4であるとする。このとき，k を3で割った余りは2であることを示せ。(以下略)　(15 千葉大学)

(iv)　**その他**

> 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに0以上の整数である点を，ここでは格子点と呼ぶ。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へ，両端点がともに格子点であり長さが1の線分を用いて，格子点 $(0,\ 0)$ から順に最も少ない本数でつなぐ方法を考える。例えば，格子点 $(0,\ 0)$ から，格子点 $(3,\ 1)$ へつなぐ方法の数は4である。次の問いに答えよ。
> (中略)
> (3)　条件 $k+l=n$ $(n\geqq 1)$ を満たす格子点 $(k,\ l)$ を考える。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足しあわせた数を n を用いて表せ。　(15 金沢大学)

(i)についてはよく教科書や問題集でも練習する機会に恵まれます。入試問題では多項定理としてよく出題されます。(ii)に関しては，二項定理より数学的帰納法に頼りがちです。なお，問題集などでよく見かける

(a)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k=2^n$ を証明せよ。

(b)　$(1+h)^n\geqq h^n+nh^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2}h^{n-2}$ を証明せよ。

のような形に関しては，私も含めて生徒は帰納法ではなく二項定理を使えばいいと形式的に覚えていたりします。(iii)に関してもどちらかというと，問題を解く中で二項定理を用いる見通しが立ちます。そして，(iv)です。(iv)のような図形や事象の考察から二項定理を発見するという作問が入試問題でも，問題集においても生徒の目に触れる機会が少ない気がします。私自身も雑駁に紹介してしまうのはそのような理由もあるのかもしれません。

§3. JJMOの予選問題から

先日，県内の研修で第13回日本ジュニア数学オリンピック(JJMO)の問題を解く機会に恵まれ，いろいろな意味で考えさせられました。問題は次のようなものです。

問

> 2015個の箱が横1列に並んでいる。それぞれの箱に赤，青，白のボールのいずれかを1つずつ入れる。その際，左から奇数番目の箱には白のボールを入れず，また隣り合う箱には同じ色のボールを入れないようにする。このとき，ボールの入れ方は何通りか。

最初，私は中学生対象の問題とは知らずに，次のような二項定理による解法を用いたので紹介します。偶数番目に白が入るところに着目しました。

(解)

(i)　1番目に青色が入り，偶数番目に白がk個$(0\leqq k\leqq 1007)$入るときを考える。

$k=0$ のとき

青赤青赤…青の1通りに定まる。これを${}_{1007}C_0$とみる。

$k=1$ のとき

白の偶数番目の入り方は${}_{1007}C_1$通り。このとき，この白の右隣は青または赤の2通り。すなわち，全体の並べ方の総数は${}_{1007}C_1\cdot 2$通りになる。

$k=2$ のとき

白の偶数番目の入り方は同様に考えて${}_{1007}C_2\cdot 2^2$通り。

同様に考えて1007個までの偶数番目の白の場合を足した総数は

$$\sum_{k=0}^{1007}{}_{1007}C_k\cdot 2^k=(1+2)^{1007}=3^{1007}\text{（通り）となる。}$$

(ii)　1番目に赤色が入る総数は(i)と同様に考えれば3^{1007}(通り)

(i), (ii)より $3^{1007}+3^{1007}=(1+1)3^{1007}=2\cdot 3^{1007}$ となる。

答　$2\cdot 3^{1007}$通り

と大雑把ですがこのような塩梅です。元来，中学生対象の問題ですから未習の二項定理を用いず，k番目など実験をして規則性を発見させる思考の過程に焦点を当てた問題でそれはそれで大切なのですが，二項定理を学ぶ教材としても面白いのではないかなと思いました。

§4. 箱の数の一般化

次に，この問いに乗じて，箱の数を一般化してみました。解答は概略に終始しますが，二項定理の発展問題として授業の教材としても良いのかなとも思います。大雑把な解答で見苦しいのですが，簡単に解いてみます。

問

n個の箱が横1列に並んでいる。それぞれの箱に赤，青，白のボールのいずれかを1つずつ入れる。その際，左から奇数番目の箱には白のボールを入れず，また隣り合う箱には同じ色のボールを入れないようにする。このとき，ボールの入れ方は何通りか。

(解)

(i)　$n=2m-1$ のとき，

偶数番目に白がk個$(0\leqq k\leqq m-1)$入るときを考える。前問と同様に考えれば，総数は

$$2\sum_{k=0}^{m-1}{}_{m-1}C_k\cdot 2^k=2\cdot(1+2)^{m-1}=2\cdot 3^{m-1}\text{（通り）}$$

(ii)　$n=2m$ のとき

1番目に青色が入り，偶数番目に白がk個$(0\leqq k\leqq m)$入るときを考える。奇数に帰着させればいいので，$n=2m-1$ 番目までの白$(0\leqq k\leqq m-1)$個の入り方を考えれば(i)と同様に$2\cdot 3^{m-1}$(通り)。最後の箱は左隣がどの色でも2通りのボールが入ることに注意すれば総数は

$2\cdot 2\cdot 3^{m-1}=4\cdot 3^{m-1}$(通り）となります。

答　$2\cdot 3^{m-1}$($n=2m-1$ のとき),
$4\cdot 3^{m-1}$($n=2m$ のとき)

§5. まとめ

今回は二項定理の話題に終始しましたが，生徒に数学の美しさを気付かせる数学教育の作問の工夫の余地は何気ないところにまだまだある気がします。今回のこの一件を通じて私自身も1つの問題に対していろいろな視点で問題を観察することの大切さに改めて気付かされました。

《参考文献》

〔1〕 2016年受験用　全国大学入試問題正解　数学（国公立大編，私立大編）旺文社

〔2〕 第13回日本ジュニア数学オリンピック予選問題

（石川県立小松明峰高等学校）