

超越数について

さいのせ いちろう
才野瀬 一郎

§1. はじめに

複素数がある整数係数多項式

$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$ の根(すなわち, 方程式 $f(x)=0$ の解)となるとき, この複素数を代数的数という。逆に, そうでない複素数を超越数という。

例えば, $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ や $\cos 20^\circ$ は整数係数多項式

$4x^2-6x+1$ や $8x^3-6x-1$ の根となるから代数的数である。他方, 自然対数の底 e や円周率 π は超越数であることが知られている。

ここでは, 高校2年程度の数学を用いた素朴な方法で次の主題を示す。

なお, 方程式 $f(x)=0$ の最高次の係数 a_0 は, 両辺に -1 を掛けることにより $a_0>0$ としても良いことに注意する。

[主題]

(1) c_k ($k=1, 2, 3, \dots$) は0以上9以下の整数で, $c_k>0$ となる項が無限に存在するとき, 次のような十進小数展開で表せる実数 b は超越数である。

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 10^{-k!} \\ = 0. c_1 c_2 000 c_3 0 \cdots 0 c_4 0 \cdots 0 c_5 0 \cdots \\ \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{小数第1位} \quad \text{2位} \quad \text{3!}=6\text{位} \quad \text{4!}=24\text{位} \quad \text{5!}=120\text{位}$$

(2) 特に, リウヴィル数 $\ell = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ は超越数である。

(3) 超越数は非加算無限個存在する。

§2. 準備

主題の証明のために, 2つの補題を準備する。

[補題1]

実数係数 m 次多項式

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$$

に対して, 定数 L が

$$|a_k| < L \quad (k=0, 1, 2, \dots, m)$$

を満たすと仮定する。

このとき, $s \geq t \geq 1$ ならば

$$|f(s) - f(t)| \leq m^2 L (s-t) s^{m-1}$$

が成り立つ。

[証明] $|f(s) - f(t)|$

$$= \left| \sum_{k=0}^m a_{m-k} s^k - \sum_{k=0}^m a_{m-k} t^k \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^m a_{m-k} (s^k - t^k) \right|$$

三角不等式と, $k=0$ の項は消えることから

$$\leq \sum_{k=1}^m |a_{m-k}| (s^k - t^k)$$

ここで, $s \geq t \geq 1$ より

$$s^k - t^k$$

$$= (s-t)(s^{k-1} + s^{k-2}t + \cdots + t^{k-1})$$

$$\leq (s-t)(s^{k-1} + s^{k-1} + \cdots + s^{k-1})$$

$$= (s-t)ks^{k-1}$$

$$\leq (s-t)ms^{m-1}$$

および, $|a_{m-k}| < L$ により

$$|f(s) - f(t)| \leq \sum_{k=1}^m L \cdot (s-t)ms^{m-1}$$

$$= m^2 L \cdot (s-t)s^{m-1}$$

[補題 2]

b は代数的数であり、多項式

$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$ (ただし、各係数 a_k は整数) の根であると仮定する。

(1) 任意の自然数 N に対して、 Nb も代数的数であり、

$$g(x) = a_0x^m + a_1Nx^{m-1} + a_2N^2x^{m-2} + \dots + a_kN^kx^{m-k} + \dots + a_mN^m$$

という整数係数多項式の根となる。

(2) $|a_k| < L$ ($0 \leq k \leq m$) ならば、
 $|a_kN^k| < L \cdot N^m$ ($0 \leq k \leq m$) である。

[証明] (1) $g(Nb)$

$$\begin{aligned} &= a_0(Nb)^m + a_1N(Nb)^{m-1} + \dots \\ &\quad + a_kN^k \cdot (Nb)^{m-k} + \dots + a_mN^m \\ &= N^m(a_0b^m + a_1b^{m-1} + \dots + a_kb^{m-k} + \dots + a_m) \\ &= N^m f(b) \end{aligned}$$

となり、 $f(b) = 0$ ならば $g(Nb) = 0$ である。

(2) $1 \leq N^k \leq N^m$ ($0 \leq k \leq m$) より明らか。

§3. 主題の証明

2つの補題を用いて、主題を証明する。

[主題の証明]

(1) 背理法による。

もし b が代数的と仮定すると、 b はある多項式

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$$

(ただし、 $m \geq 1$, 各 a_k は整数, $a_0 > 0$) の根である。
 このとき、

$$|a_k| < L \quad (0 \leq k \leq m)$$

となる十分大きな定数 L をとっておく。 $c_k > 0$ となる項は無限に存在するので、次の4つの不等式①~④をすべて満たす十分大きな自然数 n をとることができる。

$$m^2L < 10^{n!} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2m+1 < n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$10^mL < 10^{(n-1)!} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$c_n > 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

ここで、②によれば $4 \leq n$ である。

さて、このような n に対して、 $N = 10^{n!}$ とおき、 $s = Nb$ とすると

$$\begin{aligned} s &= 10^{n!} \times \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 10^{-k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 10^{n!-k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot 10^{n!-k!} + c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \cdot 10^{n!-k!} \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot 10^{n!-k!} \\ &= c_1 \cdot 10^{n!-1!} + c_2 \cdot 10^{n!-2!} \\ &\quad + \dots + c_{n-1} \cdot 10^{n!-(n-1)!} \end{aligned}$$

とおくと、

$$s \text{ の整数部分 } t \text{ は } t = u + c_n \text{ (} \geq 1 \text{)}$$

であり、

$$s < (c_1 + 1)10^{n!-1!} \leq 10^{n!} \text{ より}$$

$$s < 10^{n!} \quad \dots \textcircled{5}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} n! - (n-1)! &= (n-1) \cdot (n-1)! \\ &> (n-1)! \quad (\because n \geq 4) \end{aligned}$$

に注意すると

$$u \text{ は } 10^{(n-1)!} \text{ の倍数 } \quad \dots \textcircled{6}$$

であることがわかる。

他方、 s の小数部分は

$$\begin{aligned} s - t &= \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \cdot 10^{n!-k!} \\ &= c_{n+1} \cdot 10^{n!-(n+1)!} + c_{n+2} \cdot 10^{n!-(n+2)!} + \dots \end{aligned}$$

であり、

$$s - t < (c_{n+1} + 1) \cdot 10^{n!-(n+1)!}$$

$$\leq 10 \cdot 10^{n!-(n+1)!}$$

$$< 10^{n!-n!(n+1)+n!} \quad (\because 1 < n!) \quad \dots \textcircled{7}$$

より

$$s - t < 10^{n!-(n+1)} \quad \dots \textcircled{7}$$

を満たす。

最後に、補題2により、 $s = Nb$ は多項式

$$\begin{aligned} g(x) &= a_0x^m + a_1Nx^{m-1} + a_2N^2x^{m-2} \\ &\quad + \dots + a_kN^kx^{m-k} + \dots + a_mN^m \end{aligned}$$

の根であり、

$$|a_kN^k| < L \cdot N^m \quad (0 \leq k \leq m) \quad \dots \textcircled{8}$$

を満たす。

以上の準備のもとに、整数 $g(t)$ について、

(ア) $g(t) = 0$ かつ (イ) $g(t) \neq 0$ という矛盾を導く。

(ア) まず, $g(t)=0$ を示す。

$g(t)$ は整数より, $|g(t)| < 1$ を示せば十分である。

$s=Nb$ は $g(x)$ の根より, $g(s)=0$ を満たすから

$$\begin{aligned} & |g(t)| \\ &= |g(s) - g(t)| \\ &\leq m^2(L \cdot N^m)(s-t)s^{m-1} \quad (\because \text{⑧と補題1}) \\ &= m^2L \cdot (10^{n!})^m (s-t)s^{m-1} \\ &< 10^{n!} (10^{n!})^m 10^{n!(-n+1)} (10^{n!})^{m-1} \\ &\quad (\because \text{①⑤⑦}) \\ &= 10^{n!(2m+1-n)} < 10^0 = 1 \quad (\because \text{②}) \end{aligned}$$

(イ) 次に, $g(t) \neq 0$ を示す。

$g(t)$ は整数より, $g(t)$ が $10^{(n-1)!}$ の倍数ではないことを示せば良い。

$$\begin{aligned} g(t) &= a_0 t^m + a_1 N t^{m-1} + a_2 N^2 t^{m-2} \\ &\quad + \dots + a_k N^k t^{m-k} + \dots + a_m N^m \end{aligned}$$

において, 第2項以降はすべて $N=10^{n!}$ の倍数ゆえ, これらはすべて $10^{(n-1)!}$ の倍数となる。

第1項は, 二項定理と⑥により

$$\begin{aligned} a_0 t^m &= a_0 (u + c_n)^m \\ &= a_0 c_n^m + a_0 \times (u \text{ の倍数}) \\ &= a_0 c_n^m + \{10^{(n-1)!} \text{ の倍数}\} \end{aligned}$$

ここで, $1 \leq c_n \leq 9$ および③より,

$$0 < a_0 c_n^m < L \cdot 10^m < 10^{(n-1)!}$$

であるから, $a_0 c_n^m$ は $10^{(n-1)!}$ の倍数にはならず, $a_0 t^m$ も $10^{(n-1)!}$ の倍数にはならない。以上から, $g(t)$ が $10^{(n-1)!}$ の倍数ではないことが従う。

これで(ア)(イ)が示され, 証明が完了した。

(2) (1)で,

$c_k=1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) の場合である。

(3) (1)の条件を満たす数列 $\{c_k\}$ と $\{c'_k\}$ が異なると

きには, $b = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 10^{-k!}$ と $b' = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \cdot 10^{-k!}$ は十

進小数表示が異なるので, 異なる実数であることがわかる。(1)の仮定を満たすような数列 $\{c_k\}$ は非加算無限個存在するから, この数列から定まる超越数 b も非加算無限個存在する。

§4. おわりに

参考文献[1]では, 代数的数が加算個であることを示すことで超越数が非加算無限個存在することを紹介している。今回のレポートでは主題(2)の証明を当初の目標としていたが, [1]を参考にすること, および[1]の著者から個人的に数多くの知見を与えて頂くことにより, 主題(3)の証明に辿り着くことができた。著者の吉田信夫先生(研伸館)には深く感謝を申し上げたい。

参考文献[2]はより専門的であり, n 次の代数的数をもつ性質を用いて主題(2)の証明をしている。

参考文献[3]では, e と π が超越数であることを証明している。特に e については, 高校数学の範囲で理解できる方法である。

《参考文献》

- [1] 極限的数論入門 吉田信夫著 現代数学社 P82~P90
- [2] 数学の女王 歴史から見た数論入門 Jay R. Goldman 著 鈴木将史訳 共立出版 P479~P482
- [3] π と微積分の23話 寺澤順著 日本評論社 P110~P121

(広島県 広島市立基町高等学校)