線形漸化式に変換できる隣接3項間分数型漸化式

稲田（いなだ）　富美男（とみお）

§1. はじめに

平成25年度のセンター試験において隣接4項間の分数型漸化式が出題され驚いた。

隣接2項間の分数型漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$ はあるおき換え $b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ $\left(\text{または } b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right)$ を用いて，$b_{n+1}=rb_n$（または $b_{n+1}=pb_n+q$）に変形できる〔2〕。ここで r，p，q は定数である。

3個以上の項の間の分数型漸化式はどうなのか。とりあえず，3項間の線形(同次)漸化式

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad (q\neq 0) \qquad (1,\ 1)$$

において

$$c_n=\frac{aa_n+b}{ca_n+d} \quad (ad-bc\neq 0) \qquad (1,\ 2)$$

とおくと，後述するように次の形の漸化式を得る。

$$c_{n+2}=\frac{Ac_{n+1}c_n+Bc_{n+1}+Cc_n+D}{Ec_{n+1}c_n+Fc_{n+1}+Gc_n+H} \qquad (1,\ 3)$$

ただし A，B，…，H は実数の定数である。

このとき

問題1　(1，3) の係数の間の関係を求めよ。

問題2　逆に (1，3) の係数にどんな関係があれば (1，1) に変形(以下**変換**という)できるのか。

問題3　(1，1) に変換できる漸化式 (1，3) の解を求め性質を調べよ。

以上の問題について，参考書にも〔1〕にも無いので，自分で考えることにした。

§2. 変換の分割と線形非同次漸化式

漸化式のおき換え (1，2) は $c\neq 0$ のとき

$$c_n=\frac{aa_n+b}{ca_n+d}=\frac{bc-ad}{c^2\left(a_n+\dfrac{d}{c}\right)}+\frac{a}{c}$$

より，3段階のおき換え $c_n=b_n+\alpha$，$b_n=\dfrac{\beta}{a'_n}$，$a'_n=a_n+\gamma$ に分割できる。ここで $\alpha=\dfrac{a}{c}$，$\gamma=\dfrac{d}{c}$，$\beta=\dfrac{bc-ad}{c^2}$ とおいた。

まず漸化式 (1，1) において，$a'_n=a_n+\gamma$ とおいてみると次の線形非同次漸化式を得る。

$$\begin{aligned}a'_{n+2}&=a_{n+2}+\gamma=pa_{n+1}+qa_n+\gamma\\&=p(a'_{n+1}-\gamma)+q(a'_n-\gamma)+\gamma\\&=pa'_{n+1}+qa'_n+(1-p-q)\end{aligned}$$

逆に線形非同次の漸化式

$$a'_{n+2}=Pa'_{n+1}+Qa'_n+R \quad (Q\neq 0) \qquad (2,\ 1)$$

が与えられたとき，$a_n=a'_n-\gamma$ とおくと

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=a'_{n+2}-\gamma=Pa'_{n+1}+Qa'_n+R-\gamma\\&=Pa_{n+1}+Qa_n+(P+Q-1)\gamma+R\end{aligned}$$

となる。

(1)　$P+Q\neq 1$ のとき，(2，1) は $a_n=a'_n-\gamma$ を用いて (1，1) に変換できる。ここで $\gamma=-\dfrac{R}{P+Q-1}$

(2)　$P+Q=1$ かつ $P\neq 2$ のとき，(2，1) より

$$a'_{n+2}+\frac{R(n+2)}{P-2}=P\left\{a'_{n+1}+\frac{R(n+1)}{P-2}\right\}+Q\left(a'_n+\frac{Rn}{P-2}\right)$$

と変形できるので，$a_n=a'_n+\dfrac{Rn}{P-2}$ とおいて (1，1) に変換できる。

(3)　$P+Q=1$ かつ $P=2$ のときは

$$a'_{n+2}=2a'_{n+1}-a'_n+R$$

であり，これは

$$a'_{n+2}-\frac{R(n+2)^2}{2}=2\left\{a'_{n+1}-\frac{R(n+1)^2}{2}\right\}-\left(a'_n-\frac{Rn^2}{2}\right)$$

と変形できるので，$a_n=a'_n-\dfrac{Rn^2}{2}$ とおいて (1，1)

に変換できる。

(1), (2), (3)より (1, 2) は (1, 1) に変換できる。

§3. 線形漸化式から得られる分数型漸化式

漸化式 (2, 1) において $b_n=\dfrac{\beta}{a'_n}$ $(\beta\neq 0)$ とおくと,

$$b_{n+2}=\frac{\beta}{a'_{n+2}}=\frac{\beta}{Pa'_{n+1}+Qa'_n+R}$$
$$=\frac{\beta b_{n+1}b_n}{Rb_{n+1}b_n+Q\beta b_{n+1}+P\beta b_n}$$

さらに $c_n=b_n+\alpha$ とおくと, $b_n=c_n-\alpha$ より

$$c_{n+2}=b_{n+2}+\alpha=\frac{\beta b_{n+1}b_n}{Rb_{n+1}b_n+Q\beta b_{n+1}+P\beta b_n}+\alpha$$
$$=\frac{\beta(c_{n+1}-\alpha)(c_n-\alpha)}{R(c_{n+1}-\alpha)(c_n-\alpha)+Q\beta(c_{n+1}-\alpha)+P\beta(c_n-\alpha)}+\alpha$$
$$=\frac{Ac_{n+1}c_n+Bc_{n+1}+Cc_n+D}{Ec_{n+1}c_n+Fc_{n+1}+Gc_n+H}$$

ここで

$A=R\alpha+\beta$, $B=\alpha(-R\alpha+Q\beta-\beta)$,

$C=\alpha(-R\alpha+P\beta-\beta)$,

$D=\alpha^2(R\alpha+\beta-P\beta-Q\beta)$,

$E=R$, $F=-R\alpha+Q\beta$,

$G=-R\alpha+P\beta$, $H=\alpha(R\alpha-P\beta-Q\beta)$ (3, 1)

である。ここから P, Q, R, β を消去して次を得る。

> **定理1**　漸化式 (1, 1) からおき換え (1, 2) を用いて漸化式 (1, 3) に変換できる。このとき次の4つの方程式を満たす定数 α が存在する。
>
> $A\alpha^2+(B+C)\alpha+D=0$ (3, 2)
>
> $E\alpha^2+(F+G)\alpha+H=0$ (3, 3)
>
> $E\alpha^2+(F-A)\alpha-B=0$ (3, 4)
>
> $E\alpha^2+(G-A)\alpha-C=0$ (3, 5)
>
> さらに $A-E\alpha\neq 0$

実際に (3, 2)～(3, 5) の左辺に (3, 1) を代入するとすべて0になる。また $A-E\alpha=\beta\neq 0$ である。

補足　漸化式 (1, 1) において $p=0$ ならば (2, 1) において $P=0$

よって　$b_{n+2}=\dfrac{\beta b_n}{Rb_n+Q\beta}$

さらに $c_n=b_n+\alpha$ とおいて次式を得る。

$$c_{n+2}=\frac{Ac_n+B}{Ec_n+F} \qquad (3,\ 6)$$

ただし, 定数 A, B, E, F は (3, 1) と同じ数であり, (3, 4) と $A-E\alpha=\beta\neq 0$ を満たす。

§4. 分数型漸化式から線形漸化式へ

定理1を逆にたどって次を得る。

> **定理2**　漸化式において4つの方程式 (3, 2)～(3, 5) を満たす定数 α が存在し $A-E\alpha\neq 0$ ならば, $a'_n=\dfrac{1}{c_n-\alpha}$ により (2, 1) の形の漸化式に変換できる。
>
> さらに $\dfrac{2E\alpha+F+G}{A-E\alpha}\neq 1$ のとき (1, 3) において $a_n=\dfrac{1}{c_n-\alpha}-\gamma$ とおくと (1, 1) に変換できる。ただし $\gamma=\dfrac{E}{A-3E\alpha-F-G}$

証明　(1, 3) の漸化式において $b_n=c_n-\alpha$ おくと

$$b_{n+2}=c_{n+2}-\alpha=\frac{Ac_{n+1}c_n+Bc_{n+1}+Cc_n+D}{Ec_{n+1}c_n+Fc_{n+1}+Gc_n+H}-\alpha$$
$$=\frac{A(b_{n+1}+\alpha)(b_n+\alpha)+B(b_{n+1}+\alpha)+C(b_n+\alpha)+D}{E(b_{n+1}+\alpha)(b_n+\alpha)+F(b_{n+1}+\alpha)+G(b_n+\alpha)+H}-\alpha$$

通分して整理すると

$$\begin{aligned}\text{分子}=&(A-E\alpha)b_{n+1}b_n\\&-\{E\alpha^2+(F-A)\alpha-B\}b_{n+1}\\&-\{E\alpha^2+(G-A)\alpha-C\}b_n\\&+A\alpha^2+(B+C)\alpha+D\\&-\alpha\{E\alpha^2+(F+G)\alpha+H\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{分母}=&Eb_{n+1}b_n+(E\alpha+F)b_{n+1}+(E\alpha+G)b_n\\&+E\alpha^2+(F+G)\alpha+H\end{aligned}$$

となる。したがって4つの方程式 (3, 2)～(3, 5) が共通の解 α をもつとき, その α について $b_n=c_n-\alpha$ とおき換えて次の漸化式を得る。

$$b_{n+2}=\frac{Ib_{n+1}b_n}{Jb_{n+1}b_n+Kb_{n+1}+Lb_n} \qquad (4,\ 1)$$

ここで $I=A-E\alpha$, $J=E$, $K=E\alpha+F$, $L=E\alpha+G$ とおいた。

$A-E\alpha\neq 0$ より $I\neq 0$ であるから $a'_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおいて次を得る。

$$a'_{n+2}=\frac{1}{b_{n+2}}=\frac{Jb_{n+1}b_n+Kb_{n+1}+Lb_n}{Ib_{n+1}b_n}$$
$$=\frac{L}{I}a'_{n+1}+\frac{K}{I}a'_n+\frac{J}{I}$$

よって (1, 3) は $a'_n=\dfrac{1}{c_n-\alpha}$ により (2, 1) に変換できる。

さらに§2の(1)より, $\dfrac{L}{I}+\dfrac{K}{I}=\dfrac{2E\alpha+F+G}{A-E\alpha}\neq 1$

のとき，$a_n=a'_n-\gamma$ を用いて(1, 1)に変換できる。

ここで $\gamma=\dfrac{E}{A-3E\alpha-F-G}$ 終

補足 (3, 6)の漸化式において，$b_n=c_n-\alpha$ とおくと，

$$b_{n+2}=\frac{(A-E\alpha)b_n-\{E\alpha^2+(F-A)\alpha-B\}}{Eb_n+(E\alpha+F)}$$

となる。(3, 4)かつ $A-E\alpha\neq 0$ のとき，$a'_n=\dfrac{1}{b_n}$ を用いて(2, 1)の形の漸化式で $P=0$ であるものに変換できる。

注意1 2次方程式(3, 2), (3, 3)は(1, 3)で分子=0, 分母=0, $c_{n+1}=c_n=\alpha$ とおいて得られる。また(3, 4)は(3, 6)で $c_{n+2}=c_n=\alpha$ とおいて得られる。

注意2 代表的な分数型漸化式(〔1〕p.61)としてよく知られる $c_{n+2}=\dfrac{c_{n+1}+1}{c_n}$ は $B=D=G=1$ かつ $A=C=E=F=H=0$ で，(3, 2)〜(3, 5)を満たす α が存在せず，(1, 1)に変換できない。

§5. 分数型漸化式の例と解の性質

漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ は，次のような一般項をもっている。

(1) $x^2=px+q$ が異なる2つの解 s, t をもつとき
$a_n=As^{n-1}+Bt^{n-1}$

(2) $x^2=px+q$ が重解 s をもつとき
$a_n=\{A+B(n-1)s^{n-1}\}$

ここで A, B は定数である。

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ から $c_n=\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$ とおいて得られる数列 $\{c_n\}$ は $\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$ を一般項にもつ。

例1 $c_1=0$, $c_2=\dfrac{4}{3}$ かつ

$c_{n+2}=\dfrac{c_{n+1}c_n+5c_{n+1}-6c_n}{2c_{n+1}c_n+4c_{n+1}-7c_n+1}$ で数列 $\{c_n\}$ を与える。

(3, 2)より $\alpha^2+5\alpha-6\alpha=\alpha(\alpha-1)=0$

(3, 3)より $2\alpha^2+4\alpha-7\alpha+1=(2\alpha-1)(\alpha-1)=0$

(3, 4)より $2\alpha^2+3\alpha-5=(2\alpha+5)(\alpha-1)=0$

(3, 5)より $2\alpha^2-8\alpha+6=2(\alpha-3)(\alpha-1)=0$

共通の解 $\alpha=1$ が存在する。$\dfrac{2E\alpha+F+G}{A-E\alpha}=-1$ より線形同次漸化式に変換できる。実際，

$\gamma=\dfrac{E}{A-3E\alpha-F-G}=-1$ だから

$a_n=\dfrac{1}{c_n-1}+1=\dfrac{c_n}{c_n-1}$ とおくと数列 $\{a_n\}$ は

$a_1=0$, $a_2=4$ かつ $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

を満たす。$\{a_n\}$ は一般項 $a_n=4\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}$ をもつので，$c_n=\dfrac{a_n}{a_n-1}$ より数列 $\{c_n\}$ は

$$c_n=\frac{4\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}}{4\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}-1}$$

という一般項をもつ。

例2 $c_1=0$, $c_2=\dfrac{4}{5}$ かつ

$c_{n+2}=\dfrac{-c_{n+1}c_n+2c_{n+1}-c_n}{c_{n+1}-2c_n+1}$ で数列 $\{c_n\}$ が与えられるとき，$a_n=\dfrac{c_n}{-c_n+1}$ とおくと，$a_1=0$, $a_2=4$ かつ $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$ である数列 $\{a_n\}$ を得る。

$a_n=4n-4$ より $c_n=\dfrac{4n-4}{4n-3}$ を一般項にもつ。

注意1 この場合，$c_1=0$, $c_2=\dfrac{4}{5}$, $c_3=\dfrac{8}{9}$, $c_4=\dfrac{12}{13}$, …… より一般項が推定できる。

例3 $c_1=2$, $c_2=\dfrac{9}{8}$ かつ

$c_{n+2}=\dfrac{3c_{n+1}c_n-4c_{n+1}-c_n+2}{2c_{n+1}c_n-3c_{n+1}+1}$ で数列 $\{c_n\}$ が与えられるとき $a'_n=\dfrac{1}{c_n-1}$ とおくと，

$a'_1=1$, $a'_2=8$, $a'_{n+2}=2a'_{n+1}-a'_n+2$

を得る。これは $a_n=a'_n-n^2$ とおいて線形の漸化式

$a_1=0$, $a_2=4$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$

に変換される。この漸化式の一般項は $a_n=4n-4$ であるから，逆にたどって一般項

$$c_n=\frac{n^2+4n-3}{n^2+4n-4}$$

を得る。

注意2 ここにあげた例はすべて極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ をもつが，§6の例のようにもっていないこともある。

§6. 周期解をもつ分数型漸化式

数列 $\{a_n\}$ において，ある正の整数定数 N があって任意の n について $a_{n+N}=a_n$ が成り立つとき，**周期 N をもつ**という。

線形の漸化式

$$a_{n+2}=(2\cos\theta)a_{n+1}-a_n \quad (\theta は定数)$$

において，２次方程式 $x^2=(2\cos\theta)x-1$ は異なる２つの虚数解 $\cos\theta\pm i\sin\theta$ をもつから，§４の(1)とド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}a_n&=A(\cos\theta+i\sin\theta)^{n-1}+B(\cos\theta-i\sin\theta)^{n-1}\\&=A\{\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta\}\\&\qquad+B\{\cos(n-1)\theta-i\sin(n-1)\theta\}\end{aligned}$$

ここで $A+B$，$(A-B)i$ を再び A，B とおくと

$$a_n=A\cos(n-1)\theta+B\sin(n-1)\theta$$

特に正の整数定数Nについて $\theta=\dfrac{2\pi}{N}$ とおくと

$$a_n=A\cos\frac{2(n-1)\pi}{N}+B\sin\frac{2(n-1)\pi}{N}$$

であり，このとき $a_{n+N}=a_n$ が任意の正の整数nについて成り立つから $\{a_n\}$ は周期 N をもつ。

$c_n=\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$ とおいて得られる数列 $\{c_n\}$ は

$$c_{n+N}=\frac{aa_{n+N}+b}{ca_{n+N}+d}=\frac{aa_n+b}{ca_n+d}=c_n$$

より周期 N をもつ。

〔１〕には周期をもつ漸化式(再帰型差分方程式)が多数載せてある。ここではこの方法で得られる例をいくつか挙げる。

例４　周期３の解をもつ漸化式

$c_1=-1$，$c_2=-7-4\sqrt{3}$ かつ

$c_{n+2}=\dfrac{c_{n+1}c_n+c_{n+1}+c_n-3}{3c_{n+1}c_n-c_{n+1}-c_n-1}$ で数列 $\{c_n\}$ が与えられるとき，$a_n=\dfrac{c_n+1}{c_n-1}$ とおくと

$$a_1=0,\ a_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ かつ，}$$

$$a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n\ \left(=2\cos\frac{2\pi}{3}a_{n+1}-a_n\right)$$

を得る。これを解いて

$$a_n=\sin\frac{2(n-1)\pi}{3}$$

$c_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ より $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n=\frac{\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{3}+1}{\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{3}-1}$$

周期３の解をもつ漸化式はこの方法により

$a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n+R$ から $c_n=\dfrac{\alpha a_n+\beta}{a_n}$ とおいて，

$$c_{n+2}=\frac{(R\alpha+\beta)c_{n+1}c_n-Bc_{n+1}-Bc_n+\alpha^2(R\alpha+\beta-2)}{Rc_{n+1}c_n-Fc_{n+1}-Fc_n+\alpha(R\alpha+2)}$$

で得られる。ここで $B=\alpha(R\alpha+\beta+1)$，$F=R\alpha+1$ とした。

例５　周期４の解をもつ漸化式

$a_{n+2}=-a_n+R$ から $c_n=\dfrac{\alpha a_n+\beta}{a_n}$ とおいて

$$c_{n+2}=\frac{Ac_n-\alpha(R\alpha+2\beta)}{Rc_n-A}$$

ここで $A=R\alpha+\beta$ とした。この例は§４の**補足**と同じ型である。

例６　周期６の解をもつ漸化式

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+R$ から $c_n=\dfrac{\alpha a_n+\beta}{a_n}$ とおいて作れるが，複雑なので $R=0$ とすると，

$$c_{n+2}=\frac{-c_{n+1}c_n+2\alpha c_{n+1}-\alpha^2}{c_{n+1}-c_n}$$

例７　周期５の解をもつ漸化式

$\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ より更に複雑になる。特別な場合として $a_{n+2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a_{n+1}-a_n$ から $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて

$$b_{n+2}=\frac{-2b_{n+1}b_n}{2b_{n+1}-(\sqrt{5}-1)b_n}$$

を得る。§４の**注意２**で挙げた例も周期５をもつ。

§7. おわりに

きっかけとなった隣接４項間には程遠いが，次のような周期をもつ漸化式の例が同様の方法で見つかる。

例８　隣接４項間の周期４の漸化式

$a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}+a_n$ より $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて

$$b_{n+3}=\frac{b_{n+2}b_{n+1}b_n}{b_{n+2}b_{n+1}-b_{n+2}b_n+b_{n+1}b_n}$$

適当な初期条件についてこの漸化式から得られる数列が周期をもつことはExcel等を用いて確かめられる。〔１〕は計算ソフトを用いているが，周期解をもつかどうかだけならExcelのコピー機能で十分である。

《参考文献》

〔１〕 広田良吾･高橋大輔著「差分と超離散」 共立出版

〔２〕 稲田富美男 「分数型漸化式と１次分数変換」 数研通信 No. 77

(兵庫県立加古川南高等学校)