ベクトルの内積と線形計画法

稲田（いなだ）　富美男（とみお）

§1. はじめに

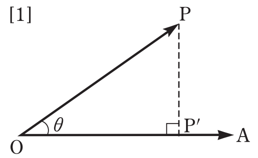
線形計画法は生徒にとって「解くことはできても理解はしにくいもの」のひとつである。線形計画法の中に登場する式 $ax+by$ をベクトル $(a,\ b)$ と $(x,\ y)$ の内積と考えると図形的意味が分かる事を示したい。

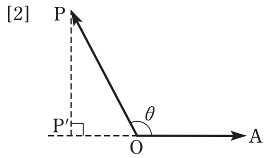
§2. ベクトルの内積と最大値，最小値

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{p}$ に対して，1 点O を定め，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とする。点Pから直線 OA に垂線 PP′ を下ろすと，内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}=\mathrm{OA}\times\mathrm{OP}\cos\theta$ は次のようになる。

[1]　$0°\leqq\theta<90°$ のとき　　$\vec{a}\cdot\vec{p}=\mathrm{OA}\times\mathrm{OP'}$

[2]　$90°<\theta\leqq180°$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{p}=-\mathrm{OA}\times\mathrm{OP'}$





線分 OP′ は OP の直線 OA 上への**正射影**であり，$\mathrm{OP}\cos\theta$ は**符号付きの長さ**である。

a，b が定数で点 P$(x,\ y)$ が領域または図形を動くとき，$\vec{a}=(a,\ b)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと $ax+by=\vec{a}\cdot\vec{p}$ より，式 $ax+by$ の最大値，最小値の問題は内積 $\vec{a}\cdot\vec{p}$ の最大値，最小値つまり $\mathrm{OP}\cos\theta$ のそれにおき換えられる。

$\boxed{1}$　点 P$(x,\ y)$ が座標平面上の線分 AB 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{a}=(a,\ b)$ のなす角を θ とすると

① $0°\leqq\theta<90°$ のとき $ax+by$ はAで最大，Bで最小である。

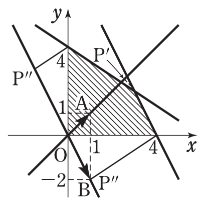
② $90°<\theta\leqq180°$ のとき $ax+by$ はBで最大，Aで最小である。

$\boxed{2}$　点 P$(x,\ y)$ が多角形 D の周，および内部にあるとき，式 $ax+by$ は頂点（または辺）上で最大値および最小値をとる。

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$は図形の直線 OA への正射影を考えると明らかであるが，$\boxed{1}$は内積の性質より，$\boxed{2}$は$\boxed{1}$より導ける。$\boxed{2}$の括弧内は OA に垂直な辺上で最大・最小になることがあることを言っている。

> **例題**　（〔1〕応用例題 5 改題）x，y が 4 つの不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$2x+y\leqq8$，$2x+3y\leqq12$ を同時に満たすとき，次の式の最大値，最小値を求めよ。
>
> (1)　$x+y$　　　　(2)　$x-2y$

$\boxed{解}$　与えられた連立不等式の表す領域を D とする。領域 D は 4 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の周と内部である。



(1)　領域 D 内の点 P$(x,\ y)$ に対し A$(1,\ 1)$ とおくと
$x+y=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より点Pから直線 OA に下ろした垂線の足 P′ を比べて，OP′ はPが $(3,\ 2)$ のとき最大，$(0,\ 0)$ のとき最小になる。よって $x+y$ は $x=3$，$y=2$ のとき最大値 5，$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0。

(2)　B$(1,\ -2)$ とおくと $x-2y=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
Pから直線 OB に下ろした垂線の足を P″ とすると符号付きの長さ OP″ はPが $(4,\ 0)$ のとき最大で，$(0,\ 4)$ のとき最小である。よって $x-2y$ は $x=4$，$y=0$ のとき最大値 4，$x=0$，$y=4$ のとき最小値 -8。

§3. おわりに

垂線 PP′ は $ax+by=k$ と書け，通常の解法に結び付けられる。

《参考文献》

〔1〕「新編数学Ⅱ」数研出版

（兵庫県立加古川南高校）