x 座標が有理数の極値と変曲点をもつ関数

中原 克芳（なかはら かつよし）

§0. はじめに

数学Ⅲの微分の練習として，増減表を用いて様々な曲線の概形を描かせる。その際必要なことは，①定義域，②関数の増減と極大値・極小値，③ y 切片までは絶対，さらに④変曲点，⑤ x 切片，⑥漸近線，⑦尖点等は可能であれば求めさせたい。今，④〜⑦については「可能であれば」と書いたが，これは例えば 3 次整関数 (多項式で表される関数) の x 切片ですら容易に求められないように，関数によってはこれらを求めるのが難しい・できないこともある (というよりその方が多い) からである。

しかし数学Ⅲの範囲で曲線の概形を描く練習をさせる場合は，2 階微分の練習のためにも，④変曲点までは求めさせたいものである。逆に言えば，生徒が変曲点を求められるような問題を用意するのが出題者としての責任であろう。なお教科書では⑧曲線の凹凸についても書かれているが，これは計算力の弱い生徒にはかえって間違いの元になる。加えて面積等を計算する際には直接影響がないように，苦労の割に重要性は低いと思われる。さらに曲線の凹凸は変曲点や x 切片，漸近線からもある程度予想が立つので，できればイメージだけで済ませたいというのが筆者の本心である。

さて，曲線の概形を描く練習をさせる上では，特に計算が不得手な生徒には，計算が難しくならないよう注意したい。そこでこの度は，②極大値・極小値と，④変曲点の x 座標が有理数の範囲で求められるような関数について考えてみた。

そのような関数の具体例は問題集等にも掲載されているが，自作することは意外に難しい。例えば最も基本的な 4 次整関数でさえも，対称形や導関数が重解をもつ等の特殊なパターン以外の問題を作るためには一計算する必要がある。(注．教科書・問題集等の 4 次整関数には大抵，導関数が重解をもつ問題が掲載されているが，これは曲線の概形が特殊だからというだけでなく，上記のように作問しやすいという理由もあるからであろう。)

実は筆者はそのような 4 次整関数については以前に研究し，本誌に発表している〔1〕。そのときは数学Ⅱの立場で考えていたために極値と x 軸との共有点という形で導いているが，〔1〕で求めた関数を積分したものを考えれば，極値と変曲点の x 座標が有理数の範囲で求められるような関数が得られる。このことと今回の関数との関連についても後述したい。

§1. 具体的な関数

関数にもいろいろあるが，初学者のためにはできる限り計算が容易であるものを与えたい。そこでここでは 2 次整関数と指数関数との積，すなわち，

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^{px}$$

の形の関数について考えたい。この関数では，積の微分の復習もでき，また 1 階微分も 2 階微分もともに (2 次整式)×(指数関数) の形になるので，比較的計算も容易である。

そこで，この関数 $f(x)$ の極値と変曲点の x 座標がともに有理数で求められるように，係数 a，b，c，p を決定するのがこの節の目的である。

$f(x)$ を微分すると，

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2ax+b)e^{px}+(ax^2+bx+c)pe^{px}\\&=\{apx^2+(2a+bp)x+b+cp\}e^{px}\end{aligned}$$

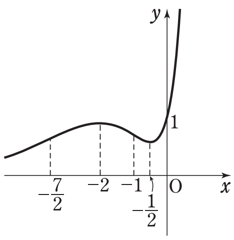
であり，2 階微分は，

$$\begin{aligned}f''(x)&=(2apx+2a+bp)e^{px}\\&\quad+\{apx^2+(2a+bp)x+b+cp\}pe^{px}\\&=\{ap^2x^2+(4ap+bp^2)x\\&\qquad+2a+2bp+cp^2\}e^{px}\end{aligned}$$

となる。これらの 2 つの導関数において，2 次整式の部分を $=0$ とおいた 2 次方程式がともに有理数解をもつようにしたい。それにはその判別式をそれぞれ D_1，D_2 としたとき，それらがともに平方数になればよい。実際に判別式を計算すると，

$$D_1=(2a+bp)^2-4ap(b+cp)$$
$$\quad=4a^2+b^2p^2-4acp^2,$$
$$D_2=(4ap+bp^2)^2-4ap^2(2a+2bp+cp^2)$$
$$\quad=p^2(8a^2+b^2p^2-4acp^2)$$
$$\quad=p^2(4a^2+D_1)$$
となる。ここで D_1，D_2 がともに平方数であるわけだが，何と，この式の形はかの有名な Pythagoras 数ではないか！　そこで早速該当する数値を調べてみた。具体的には，$p=1$，$a=2$，$D_1=3^2$ とすれば，$D_2=5^2$ となるので条件が満たされる。このとき，
$$D_1=16+b^2-8c=9$$
から
$$b^2-8c=-7 \quad \cdots(☆)$$
が得られる。よって，$b=c=1$ とすれば，条件を満たす具体的な関数が得られたことになる。

例１． $f_1(x)=(2x^2+x+1)e^x$ のとき，
$$f_1{}'(x)=(2x^2+5x+2)e^x$$
$$\quad=(2x+1)(x+2)e^x,$$
$$f_1{}''(x)=(2x^2+9x+7)e^x$$
$$\quad=(2x+7)(x+1)e^x$$
（グラフの概形）



このようにして，Pythagoras 数のお陰で意外に簡単に所要の関数の具体例を作ることができた。しかもグラフの概形もなかなかにわかりやすい。しかしこれ以外に関数が作れないか，そう考えて（☆）式を眺めると，当然 $b=-1$ は考えられる。同じように思えるが，実は次の例２．を見てわかるように，こちらの方が少しだけ計算が楽になる。

例２． $f_2(x)=(2x^2-x+1)e^x$ のとき，
$$f_2{}'(x)=(2x^2+3x)e^x=x(2x+3)e^x,$$
$$f_2{}''(x)=(2x^2+7x+3)e^x$$
$$\quad=(2x+1)(x+3)e^x$$
（グラフの概形は省略）

さらに（☆）を満たす $(b,\ c)$ の組は，$(\pm3,\ 2)$，$(\pm5,\ 4)$，$(\pm7,\ 7)$，$(\pm9,\ 11)$，…と，実は b が奇数であれば b^2+7 が必ず８の倍数になるため，無数に存在するのであった。

最初は１つでも具体例が得られれば良いと思っていたが，例が無数にあるのならばもう少し条件を強めたくなる。例１・２ともに x 切片が存在しないので，x 切片が存在するような関数を考えてみたが，実は最初の $f(x)$ の２次整式の部分 $=0$ の判別式 D_0 は，$a=2$ の場合は，
$$D_0=b^2-4ac=b^2-8c=-7<0$$
となって，実数解が存在しない。すなわち，$a=2$ の場合は x 切片まで要求することはできないのであった。（$a\neq2$ の場合は，例えば
$$f_3(x)=(4x^2+x-10)e^x$$
のように x 切片をもつようにすることはできる。ただしこの場合，x 切片は無理数になる。x 切片まで有理数にしようと思うと係数が大きくなり過ぎて，生徒向けの問題にはならないであろう。）

§2. 別の方法

次に懸案の関数について，別の視点から考えてみよう。これは「問題づくりの道具箱」（プレアデス出版）〔２〕の著者である斎木清治先生の考え方を利用したものである。斎木先生の考え方は，関数 $g(x)$ で，方程式 $g(x)=0$，$g'(x)=0$ がともに有理数解をもつようなものを探す。このとき $g(x)$ の原始関数が求める関数になるというものである。この方法で係数の条件を求めてみよう。

まず，α，β を異なる有理数として，$g(x)$ を，
$$g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)e^x$$
とおく（先の例では指数を px としたが，$p=1$ での関数の存在がわかったので，今後は最初から指数を x として考える）。このとき求める関数 $G(x)$ は，$g(x)$ を（部分）積分して（以後，簡単のため積分定数は０として計算する），
$$G(x)=\int g(x)\,dx$$
$$\quad=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}e^x$$
$$\qquad-\int\{2x-(\alpha+\beta)\}e^x dx$$
$$\quad=\{x^2-(\alpha+\beta+2)x+\alpha\beta+\alpha+\beta+2\}e^x$$
として得られる。

続いて $G(x)$ の変曲点の x 座標が有理数になるように α，β の条件を定めよう。それには $g(x)$ を微分して，

$$
\begin{aligned}
&g'(x)\\
&=(x-\alpha)e^x+(x-\beta)e^x+(x-\alpha)(x-\beta)e^x\\
&=\{x^2-(\alpha+\beta-2)x+\alpha\beta-\alpha-\beta\}e^x,
\end{aligned}
$$

ここで $g'(x)=0$ が有理数解をもつようにする。2次整式の部分 $=0$ の判別式を D_3 とすれば，

$$
\begin{aligned}
D_3&=(\alpha+\beta-2)^2-4(\alpha\beta-\alpha-\beta)\\
&=(\alpha-\beta)^2+4\ (>0)
\end{aligned}
$$

よって D_3 が有理数の平方になるためには α，β が整数の範囲では不可能で，例えば $\alpha-\beta=\dfrac{3}{2}$ $\left(\text{このとき } D_3=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \text{ と，有理数の平方になる}\right)$ のように有理数の範囲で考えることになる。

例3． $\alpha=1$，$\beta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，2倍して

$$
\begin{aligned}
g(x)&=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)e^x\\
&=(2x^2+x-1)e^x
\end{aligned}
$$

とすると，

$$G(x)=(2x^2-5x+6)e^x$$

で，

$$g'(x)=(2x^2+5x)e^x=x(2x+5)e^x$$

となり，$G(x)$ は極値と変曲点の x 座標がともに有理数になることがわかる。

§3.　4次整関数との関連

最初に，極値と変曲点の x 座標がともに有理数の範囲で求められるような4次整関数について記したが，この稿の最後に今回の研究との意外な関連についても，一言書かせていただきたい。

今回研究した（2次整式）×（指数関数）の形で，極値と変曲点の x 座標がともに有理数になる関数の係数を得るには，§1で見たように2つの判別式がともに平方数になるということから，Pythagoras 数が現れた。まさかこんな所に Pythagoras 数が！と，自分でも計算していて驚いたように，これだけでも十分に意外性に富んでいる。

しかし〔1〕を読んでいただければわかるように，実は極値と変曲点の x 座標がともに有理数になる4次整関数の係数を得た際にも，類似の関係が現れる。その説明のために前回の研究〔1〕の要旨をまとめてみよう（今回の研究と合わせるため，少し内容を変えている）。

a，b を整数として，4次整関数を

$$h(x)=3x^4-4(a+b)x^3+6abx^2$$

とおき，それぞれ1階微分，2階微分すると，

$$
\begin{aligned}
h'(x)&=12x^3-12(a+b)x^2+12abx\\
&=12x(x-a)(x-b)\\
h''(x)&=12\{3x^2-2(a+b)x+ab\}
\end{aligned}
$$

となる。ここで $h''(x)=0$ の判別式 D_4 は，

$$\frac{D_4}{4}=(a+b)^2-3ab=a^2-ab+b^2$$

となるので，結局極値と変曲点の x 座標がともに有理数（D_4 が平方数）になるのは，実は余弦定理で角が $60°$ の場合，すなわち1つの角が $60°$ で3辺がすべて整数値である三角形が満たす等式が現れるのであった。

1つの角が $120°$ で3辺がすべて整数値である三角形は，Eisenstein 三角形（一松信先生の命名）と呼ばれるが，1つの角が $60°$ の三角形から正三角形を除けば Eisenstein 三角形になるので，これも広義の Eisenstein 三角形と呼んでも良いであろう。

4次の整関数と，（2次整式）×（指数関数）の形の関数，形は違うが双方の極値と変曲点という性質を調べていくと，意外な所で三角形の整数辺という思わぬ類似の性質に巡り合えた。直接の関係は不明であるため，今後の課題となるが，つくづく数学を研究して良かったと思う所存である。今回の研究でそのような発見ができたことを嬉しく思うと同時に，その感動を授業で生徒に伝えたいものである。

《参考文献》

〔1〕「極値および x 軸との共有点が有理数となる整数係数の3次関数の決定」清水（中原）克芳（数研通信 No.23）$p.15$

〔2〕「問題づくりの道具箱」斎木清治（プレアデス出版）$p.173$

（広島県　広島女学院中学高等学校）