3次の同次対称式 $P(a,\ b,\ c)$ の不等式について

柳田　五夫（やなぎた　いつお）

§1. はじめに

$P(a,\ b,\ c)$ を3次の同次対称多項式とする。任意の負でない実数 $a,\ b,\ c$ に対して不等式 $P(a,\ b,\ c)\geqq 0$ が成り立つための必要十分条件が Hoo Joo Lee により証明されている。

> **定理2（SD 3）**　$P(a,\ b,\ c)$ は3次の同次対称多項式とする。任意の負でない実数 $a,\ b,\ c$ に対して不等式 $P(a,\ b,\ c)\geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は
> $$P(1,\ 1,\ 1),\ P(1,\ 1,\ 0),\ P(1,\ 0,\ 0)\geqq 0$$
> が成り立つことである。

この定理により，不等式 $P(a,\ b,\ c)\geqq 0$ が成立するかどうかは簡単にチェックできることになる。定理の初等的な証明と適用例を紹介したい。

§2. 和の記号 $\sum\limits_{cyclic}$ の定義

定義　和の記号 $\sum\limits_{cyclic}$ を導入する。$P(x,\ y,\ z)$ を3変数 $x,\ y,\ z$ の関数とするとき

$$\sum_{cyclic} P(x,\ y,\ z)$$
$$=P(x,\ y,\ z)+P(y,\ z,\ x)+P(z,\ x,\ y)$$

で定義される。

たとえば

$$\sum_{cyclic} x^3=x^3+y^3+z^3,$$
$$\sum_{cyclic} x^2y=x^2y+y^2z+z^2x,$$
$$\sum_{cyclic} xy^2=xy^2+yz^2+zx^2,$$
$$\sum_{cyclic} xyz=xyz+yzx+zxy=3xyz$$

§3. 証明

まず，3次の cyclic 同次多項式 $P(a,\ b,\ c)$ に対する不等式 $P(a,\ b,\ c)\geqq 0$ の成立をチェックする "Cyclic inequality of Degree 3"（CD 3 定理）を証明しておく。これは P. K. Hung〔1〕により証明されているが，初等的な証明を示す。

3次の cyclic 同次多項式 $P(a,\ b,\ c)$ は

$$P(a,\ b,\ c)$$
$$=m\sum_{cyclic} a^3+n\sum_{cyclic} a^2b+p\sum_{cyclic} ab^2+qabc$$

と表せる。ただし，$P(a,\ b,\ c)$ が3次の cyclic 同次多項式であるとは，ある $a,\ b,\ c$ の3次式 $Q(a,\ b,\ c)$ を用いて $P(a,\ b,\ c)=\sum\limits_{cyclic} Q(a,\ b,\ c)$ と書ける場合をいう。

> **定理1（CD 3）**　$P(a,\ b,\ c)$ は3次の cyclic 同次多項式とする。任意の負でない実数 $a,\ b,\ c$ に対して不等式 $P(a,\ b,\ c)\geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は
> (i)　$P(1,\ 1,\ 1)\geqq 0$
> 　かつ
> (ii)　任意の負でない実数 $a,\ b$ に対して
> 　$P(a,\ b,\ 0)\geqq 0$ が成り立つ
> ことである。

［証明］　必要性は明らかであるから十分性を示す。

(i)　$P(1,\ 1,\ 1)\geqq 0$
　かつ
(ii)　任意の負でない実数 $a,\ b$ に対して
　$P(a,\ b,\ 0)\geqq 0$ が成り立つ

とする。このとき

任意の負でない実数 $a,\ b,\ c$ に対して

$$P(a,\ b,\ c)$$
$$=m\sum_{cyclic} a^3+n\sum_{cyclic} a^2b+p\sum_{cyclic} ab^2+qabc\geqq 0$$

が成り立つことを示す。

$P(1,\ 1,\ 1)\geqq 0$ から

$$3m+3n+3p+q\geqq 0$$

任意の負でない実数 $a,\ b$ に対して

$P(a,\ b,\ 0)\geqq 0$ が成り立つから

$P(1,\ 0,\ 0)=m\geqq 0,\ P(1,\ 1,\ 0)=2m+n+p\geqq 0$

一般性を失うことなく $a=\min(a,\ b,\ c)$ と仮定できるから，$b-a=u\geqq 0,\ c-a=v\geqq 0$ とおき，

$b=a+u$, $c=a+v$ を $P(a,\ b,\ c)\geqq 0$ に代入すると $\quad m[a^3+(a+u)^3+(a+v)^3]$

$$
\begin{aligned}
&+n[a^2(a+u)+(a+u)^2(a+v)+(a+v)^2a]\\
&+p[a(a+u)^2+(a+u)(a+v)^2+(a+v)a^2]\\
&+qa(a+u)(a+v)\geqq 0\\
\Longleftrightarrow\ &(3m+3n+3p+q)a^3+(3mu+3nu+3pu\\
&\quad+qu+3mv+3nv+3pv+qv)a^2\\
&\quad+(3mu^2+nu^2+pu^2+2nuv+2puv\\
&\quad+quv+3mv^2+nv^2+pv^2)a\\
&\quad+m(u^3+v^3)+nu^2v+puv^2\geqq 0
\end{aligned}
$$

この不等式を $Aa^3+Ba^2+Ca+D\geqq 0$ とおくと

$A=3m+3n+3p+q\geqq 0$,

$B=3mu+3nu+3pu+qu+3mv+3nv+3pv+qv$

$\quad=(3m+3n+3p+q)(u+v)\geqq 0$

$3m+n+p=m+(2m+n+p)\geqq 0$, $u^2+v^2\geqq 2uv$

であるから

$$
\begin{aligned}
C&=(3m+n+p)(u^2+v^2)+(2n+2p+q)uv\\
&\geqq(3m+n+p)\cdot 2uv+(2n+2p+q)uv\\
&=(6m+4n+4p+q)uv\\
&=(\underbrace{3m+3n+3p+q}_{\geqq 0}+\underbrace{3m+n+p}_{\geqq 0})uv\geqq 0,
\end{aligned}
$$

$D=m(u^3+v^3)+nu^2v+puv^2=P(u,\ v,\ 0)\geqq 0$

したがって，不等式 $Aa^3+Ba^2+Ca+D\geqq 0$ は成り立つ。 ■

定理 2（SD 3） $P(a,\ b,\ c)$ は 3 次の同次対称多項式とする。任意の負でない実数 a, b, c に対して不等式 $P(a,\ b,\ c)\geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は

$$P(1,\ 1,\ 1),\ P(1,\ 1,\ 0),\ P(1,\ 0,\ 0)\geqq 0$$

が成り立つことである。

［証明］ 必要性は明らかであるから十分性を示す。

$$P(1,\ 1,\ 1),\ P(1,\ 1,\ 0),\ P(1,\ 0,\ 0)\geqq 0$$

が成り立つとする。このとき，CD 3 定理から任意の負でない実数 a, b に対して

$$P(a,\ b,\ 0)\geqq 0$$

が成り立つことを示せばよい。

$P(a,\ b,\ c)$ は 3 次の同次対称多項式であるから

$$P(a,\ b,\ c)=m\sum_{cyclic}a^3+n\sum_{cyclic}a^2b+p\sum_{cyclic}ab^2+qabc$$

とおくと，$n=p$ である。

仮定の条件式 $P(1,\ 1,\ 0)$, $P(1,\ 0,\ 0)\geqq 0$ から $m+n\geqq 0$, $m\geqq 0$ を得る。

$a\geqq 0$, $b\geqq 0$ のとき

$$a^3+b^3-ab(a+b)=(a-b)^2(a+b)\geqq 0$$

が成り立つことを使うと，$a\geqq 0$, $b\geqq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
P(a,\ b,\ 0)&=m(a^3+b^3)+n(a^2b+ab^2)\\
&\geqq mab(a+b)+n(a^2b+ab^2)\\
&=(m+n)ab(a+b)\geqq 0
\end{aligned}
$$
■

§4. 使用例

次に，SD 3 定理が使える不等式をいくつか紹介したい。

例題 1 a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

3 次の同次対称式の不等式なので，SD 3 定理から $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$ のとき成り立つことをチェックすればよい。

以降の例題では下線部を省略する。証明は次のようにできる。

［証明］ 差をとると

$$
\begin{aligned}
&9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc\\
&=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)\\
&\quad+c(a^2-2ab+b^2)\\
&=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geqq 0
\end{aligned}
$$

よって

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
■

例題 2 （Schur）a, b, c が負でない実数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

証明は柳田〔2〕問題 4 を参照。

例題 3 （United Kingdom 1999）

p, q, r は正の実数で，$p+q+r=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ。

$$7(pq+qr+rp)\leqq 2+9pqr$$

同次化（Homonization）すると

$$
\begin{aligned}
&7(pq+qr+rp)\leqq 2+9pqr\\
\Longleftrightarrow\ &7(pq+qr+rp)(p+q+r)\\
&\quad\leqq 2(p+q+r)^3+9pqr
\end{aligned}
$$

証明は次のようにできる。

[証明]　同次化(Homonization)して

$$7(pq+qr+rp)\leqq 2+9pqr$$
$$\Longleftrightarrow 7(pq+qr+rp)(p+q+r)\leqq 2(p+q+r)^3+9pqr$$
$$\Longleftrightarrow 7[p^2(q+r)+q^2(r+p)+r^2(p+q)]+21pqr \leqq 2(p^3+q^3+r^3) +6[p^2(q+r)+q^2(r+p)+r^2(p+q)]+21pqr$$
$$\Longleftrightarrow p^2(q+r)+q^2(r+p)+r^2(p+q)\leqq 2(p^3+q^3+r^3)$$

最後の不等式は，次のように示せる。

$$2(p^3+q^3+r^3)-(p^2q+p^2r+q^2r+q^2p+r^2p+r^2q)$$
$$=(p^3+q^3-p^2q-pq^2)+(q^3+r^3-q^2r-qr^2)+(r^3+p^3-r^2p-rp^2)$$
$$=(p-q)^2(p+q)+(q-r)^2(q+r)+(r-p)^2(r+p)$$
$$\geqq 0$$
■

例題 4　(Serbia 2008)

a，b，c は正の実数で，$a+b+c=1$ を満たすとき，次の不等式を証明せよ。

$$a^2+b^2+c^2+3abc\geqq\frac{4}{9}$$

同次化(Homonization)すると

$$a^2+b^2+c^2+3abc\geqq\frac{4}{9}$$
$$\Longleftrightarrow 9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geqq 4(a+b+c)^3$$

証明は次のようにできる。

[証明]　同次化(Homonization)して

$$a^2+b^2+c^2+3abc\geqq\frac{4}{9}$$
$$\Longleftrightarrow 9(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+27abc \geqq 4(a+b+c)^3$$
$$\Longleftrightarrow 9(a^3+b^3+c^3)+9[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]+27abc \geqq 4(a^3+b^3+c^3)+12[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]+24abc$$
$$\Longleftrightarrow 5(a^3+b^3+c^3)+3abc \geqq 3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$

例題 2(Schur の不等式)より

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

が成り立つから

$$2(a^3+b^3+c^3) \geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

を示せばよい。(例題 3 の証明中の最後の不等式参照)　■

例題 5　(2014 年 第 24 回・日本数学オリンピック本選)　不等式

$$\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+k(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+k(a-b)^2}\geqq\frac{1}{2}$$

が $a+b+c=1$ を満たす任意の非負実数 a，b，c に対して成り立つような実数 k の最大値を求めよ。

$k>0$，$a>0$，$b>0$，$c>0$ として，不等式が成り立つような十分条件を調べてみる。コーシー・シュワルツの不等式の変形(柳田〔2〕参照)

b_1，b_2，…，$b_n>0$ のとき，

$$\frac{{a_1}^2}{b_1}+\frac{{a_2}^2}{b_2}+\cdots+\frac{{a_n}^2}{b_n}\geqq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

等号は，$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ のときに限る。

を使うと

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{1+9bc+k(b-c)^2}$$
$$=\sum_{cyclic}\frac{a^2}{a+9abc+ka(b-c)^2}$$
$$\geqq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc+k\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}}$$

が成り立つから

$$\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc+k\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}}\geqq\frac{1}{2}$$

すなわち

$$1\geqq 27abc+k\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}$$

が成り立てばよい。

同次化(Homonization)して

$$(a+b+c)^3 \geqq 27abc+k\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}$$

3 次の同次対称式の不等式なので，SD 3 定理から $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$ のとき成り立つための条件を調べる。

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 0)$ のときは不等式が成り立ち，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 0)$ のとき成り立つ条件は $k\leqq 4$ である。

したがって，$k\leqq 4$ のとき，問題の不等式が成り立つことがわかる。

解　与えられた不等式に $a=b=\frac{1}{2}$，$c=0$ を代入すると，$2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}k}\geqq\frac{1}{2}$ より $-4<k\leqq4$ となる。したがって，$k=4$ のとき不等式が成立することを示せば，k の最大値は 4 となる。以下，$k=4$ のとき不等式が成立することを示す。

$a>0$，$b>0$，$c>0$ のときは，コーシー・シュワルツの不等式の変形を使うと

$$\sum_{cyclic}\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2}$$

$$=\sum_{cyclic}\frac{a^2}{a+9abc+4a(b-c)^2}$$

$$\geqq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc+4\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}}$$

が成り立つから

$$\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc+4\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}}\geqq\frac{1}{2}$$

すなわち

$$1\geqq27abc+4\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}$$

を示せばよい。同次化(Homonization)して

$$(a+b+c)^3\geqq27abc+4\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}\quad\cdots\cdots(*)$$

を示せばよい。差をとると

$$(a+b+c)^3-27abc-4\{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\}$$

$$=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)$$

例題 2(Schur の不等式)より

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

が成り立つから，$(*)$を得る。

a，b，c のなかに 0 があるときは，$c=0$ と仮定すると，$a+b=1$，$a\geqq0$，$b\geqq0$ のとき

$$\frac{a}{1+4b^2}+\frac{b}{1+4a^2}\geqq\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots(**)$$

を示せばよい。$a=0$ または $b=0$ のとき，$(**)$は成り立つから，$a>0$，$b>0$ とする。

$$\frac{a}{1+4b^2}+\frac{b}{1+4a^2}=\frac{a^2}{a+4ab^2}+\frac{b^2}{b+4a^2b}$$

$$\geqq\frac{(a+b)^2}{a+b+4ab(a+b)}$$

$$=\frac{1}{1+4ab}$$

より，$\frac{1}{1+4ab}\geqq\frac{1}{2}$ すなわち $1\geqq4ab$ を示せばよい。これは $1-4ab=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geqq0$ から成り立つ。■

《参考文献》

〔1〕 P. K. Hung：Secrets in Inequalities volume 2-advanced inequalities-free chapter, GIL Publishing House

〔2〕 柳田　五夫，不等式の証明に役立つ不等式と接線の利用について，数研通信　No. 75

(元 栃木県立佐野高等学校)