

正弦曲線で囲まれた図形を展開図とする立体

いとう のぶお
伊藤 巨央

§1. 立体 N

次のような立体を考える。

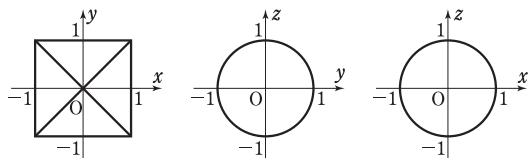
『真正面から見ると半径 r の円、真横から見ると半径 r の円、真上から見ると対角線の鮮明な 1 辺 $2r$ の正方形』という立体。これを『立体 N 』と呼ぶこととする。

立体 N とは、底面の半径 r で高さが十分ある 2 つの円柱の軸が直交するときの、2 つの円柱の共通部分としての立体である。

これを、 $r=1$ として座標空間で考えると、立体 N は、2 つの円柱 $x^2+z^2 \leq 1$ 、 $y^2+z^2 \leq 1$ の共通部分としてよい。

§2. 立体 N の展開図

$r=1$ として、座標空間での立体 N の展開図を考える。立体 N を、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面に射影した図は各々下のようになる。



円柱面として、 $y^2+z^2=1$ ……①

$x^2+z^2=1$ ……②

とする。

①より、 $z^2=1-y^2$ 、②より、 $z^2=1-x^2$ であるが、

$0 \leq |x| \leq 1$ 、 $0 \leq |y| \leq 1$ の範囲において、

$|y| \geq |x|$ では、 $0 \leq 1-y^2 \leq 1-x^2$ より、

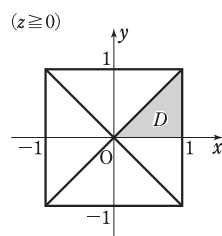
(①で囲まれた部分) \cap (②で囲まれた部分)

$|y| \leq |x|$ では、 $0 \leq 1-x^2 \leq 1-y^2$ より、

(②で囲まれた部分) \cap (①で囲まれた部分)

つまり、立体 N は、 $|y| \geq |x|$ では、円柱面①に、 $|y| \leq |x|$ では、円柱面②に囲まれてできている。

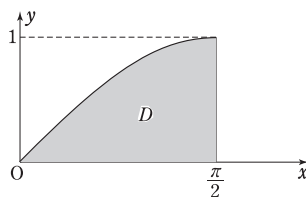
円柱面②の中の $0 \leq y \leq x$ 、 $0 \leq x \leq 1$ 、 $0 \leq z \leq 1$ の部分を D とする。



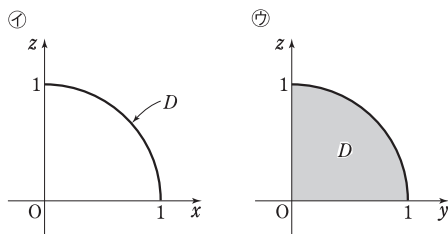
対称性から、まずは曲面 D が平面図形としてどのような図形かを調べる。

曲面 D を平面化させ、平面 $z=1$ 上に貼り付け、これを平面 D と呼ぶこととする。点 $(0, 0, 1)$ は固定し、曲面 D 上での y 軸に平行な各々の直線は y 軸に平行に保つ。つまり、平面 D の xy 平面への射影図として図⑦のようにする。

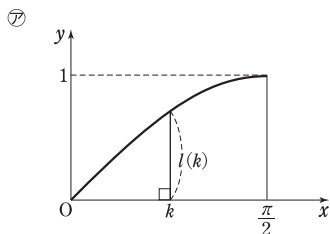
⑦ (平面 $z=1$ 上)



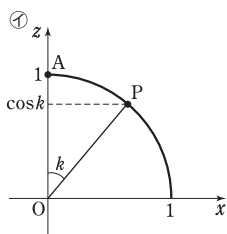
また、曲面 D を zx 平面、 yz 平面に射影させると、各々図⑧、図⑨になる。



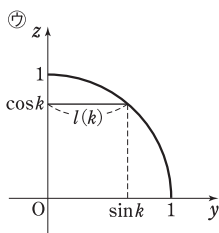
平面 D を平面 $x=k$ ($0 \leq k \leq \frac{\pi}{2}$) で切り取ってできる線分の長さを $l(k)$ とする。



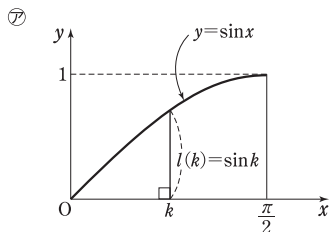
図⑦において、 $A(0, 1)$ として、円周上に点 P を、 $\widehat{PA}=k$ となるようにとると、 P の z 座標は $\cos k$ である。



このとき、図⑧において、曲面 D を平面 $z=\cos k$ で切り取ってできる線分の長さが $l(k)$ であり、 $l(k)=\sqrt{1-\cos^2 k}=\sin k$ である。



したがって、 $l(k)=\sin k$ となるから、平面 D は、曲線 $y=\sin x$, x 軸, 直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の図形と合同である。

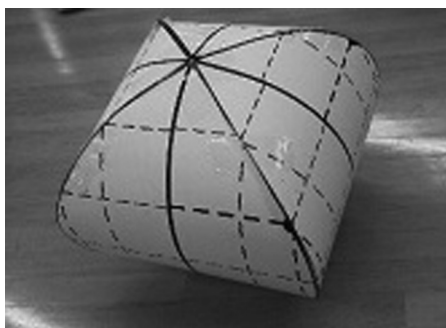
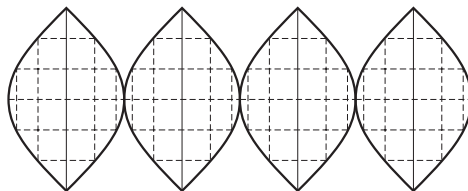
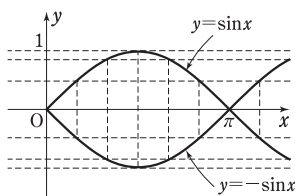


立体 N の展開図として、対称性から、円柱面②の $x \geq 0$ の部分は、2曲線 $y=\sin x$, $y=-\sin x$ の $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で囲まれた図形である。さらに、円柱面②の $x \leq 0$ の部分、円柱面①の $y \geq 0$ の部分、 $y \leq 0$ の部分も対称性からすべて同じ図形である。

つまり、 $r=1$ とした立体 N の展開図は、“2曲線 $y=\sin x$, $y=-\sin x$ の $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で囲まれた図形” 4つ分ということになる。

§3. 結論

2曲線 $y=\sin x$, $y=-\sin x$ の $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で囲まれた部分と相似な同じ図形4枚を貼り合わせると、立体 N ができる。



(愛知県 名古屋国際中学校・高等学校)