$\cos 20^\circ$ の性質と作図不可能性

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§0. はじめに

まず，数学Ⅱで学んだことを基にして，実数 $\cos 20^\circ$ の性質を調べる（§1）。

次に，この結果と数学A「図形の性質」で学んだことを使い，「定規とコンパスを用いる作図において，60° の角の3等分線は作図できない」ことを高校数学の範囲で示す（§3 定理8）。

§1. $\cos 20^\circ$ の性質

因数定理を利用する際によく用いる命題1を準備し，命題2を示す。

［命題1］　整数係数方程式の有理数解

整数係数の n 次方程式

$$c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots\cdots+c_{n-1}x+c_n=0$$

が有理数の解 $\dfrac{b}{a}$（a，b は互いに素な整数）をもつならば，a は c_0 の約数であり，b は c_n の約数である。

証明　仮定により

$$c_0\left(\frac{b}{a}\right)^n+c_1\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+c_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)+c_n=0$$

両辺に a^n を掛けて

$$c_0b^n+c_1b^{n-1}a+\cdots\cdots+c_{n-1}ba^{n-1}+c_na^n=0$$

これから次の2式を得る。

$$c_0b^n=-a(c_1b^{n-1}+\cdots\cdots+c_na^{n-1})$$

$$c_na^n=-b(c_0b^{n-1}+\cdots\cdots+c_{n-1}a^{n-1})$$

ここで a，b が互いに素より，上式から a が c_0 の約数となり，下式から b が c_n の約数となる。 終

［命題2］　$\cos 20^\circ$ を解とする3次方程式

$f(x)=8x^3-6x-1$ として，方程式 $f(x)=0$ の解を考える。

(1)　方程式は異なる3個の実数解 α，β，γ をもち，これらは次の不等式を満たす。

$$-1<\alpha<-\frac{1}{2}<\beta<0,\ \frac{1}{2}<\gamma<1 \quad \cdots\cdots①$$

(2)　$\alpha=\cos 140^\circ$，$\beta=\cos 260^\circ$，$\gamma=\cos 20^\circ$ である。

(3)　方程式は有理数解をもたない。（主結果）
したがって，α，β，γ は無理数である。

(4)　$\cos 20^\circ=0.93\cdots\cdots$

$\cos 20^\circ+\cos 140^\circ+\cos 260^\circ=0$

$\cos 20^\circ\cos 140^\circ\cos 260^\circ=\dfrac{1}{8}$

証明　(1)　$f'(x)=6(2x-1)(2x+1)$ より，関数 $f(x)$ の増減は次の通り。

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

ここで，$f(-1)=-3<0$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)>0$，

$f(0)=-1<0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，$f(1)=1>0$

により，$f(x)=0$ は異なる3個の実数解 α，β，γ をもち，不等式①を満たすことがわかる。

(2)　$\theta=20^\circ+120^\circ\times k$（$k=0$，$1$，$2$）とすると，

$$\cos 3\theta=\cos(60^\circ+360^\circ\times k)=\frac{1}{2}$$

他方，3倍角の公式から

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{1}{2}$$

すなわち，$\cos\theta$ は $f(x)=0$ の解である。

$$\cos 140^\circ<\cos 260^\circ<0<\cos 20^\circ$$

により，

$$\alpha=\cos 140^\circ,\ \beta=\cos 260^\circ,\ \gamma=\cos 20^\circ$$

(3)　もし，$f(x)=0$ が有理数の解 $\dfrac{b}{a}$（a と b は互いに素な整数）をもつと仮定する。命題1により，a は8の約数であり，b は1の約数となる。ゆえに，

$$\frac{b}{a}=\pm\frac{1}{1},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8}$$

のいずれかであるが，いずれも $f\left(\dfrac{b}{a}\right) \neq 0$ となり，有理数解は存在しないことがわかる。

これは矛盾。

(4) 上は，$f(0.93)=-0.145144<0$,

$f(0.94)=0.004672>0$

より，$f(x)=0$ は $0.93<x<0.94$ に実数解をもつ。この実数解は $\gamma\,(>0)$ より，

$\cos 20^\circ=0.93\cdots\cdots$ となる。

下の2つは解と係数の関係による。 終

§2. 作図と3次方程式

以下において，作図とは定規とコンパスを用いる作図を表す。鍵となる命題6を示すために，作図に関する基本事項を確かめる。

［確認3］ 定規とコンパスによる作図

平面上に長さ1の線分 P_1P_2 が与えられたとき，点 P_1 を原点，直線 P_1P_2 を x 軸とし，原点を通り x 軸に垂直な直線を作図して y 軸とする。このようにして，平面を座標平面として考える。

2点 $P_1=(0,\ 0)$，$P_2(1,\ 0)$ から始めて，点 P_1，P_2，……，$P_n\,(n\geqq 2)$ が作図されているとき，

(1) これらの点を元にして作図できる図形は，次の(ア)(イ)に限られる。

(ア) 定規を用いて，異なる2点 P_i，P_j を通る直線 L_{ij} を引く。

(イ) コンパスを用いて，点 P_r を中心とする半径 P_sP_t の円 C_{rst} を描く。

(2) 新しい点 P_{n+1} が得られるのは，次の(ウ)(エ)(オ)を作図する場合に限られる。

(ウ) 異なる2直線 L_{ij} と L_{IJ} の交点

(エ) 直線 L_{ij} と円 C_{rst} の交点

(オ) 異なる2円 C_{rst} と C_{RST} の交点

［確認4］

(0) 点 $(a,\ 0)$ が作図できるとき，a は作図可能な実数であるという。これは，点 $(0,\ a)$ が作図できることと同値である。

また，点 $P(x,\ y)$ が作図できるための必要十分条件は，x と y が共に作図可能な実数となることである。(座標軸に平行な直線を作図する。)

(1) a，b が作図可能な実数のとき，その加減乗除 $\left(a\pm b,\ ab,\ \dfrac{a}{b}\right)$ および，平方根 $\sqrt{a}$ $(a>0)$ は作図可能な実数である。

(2) 有理数は，$x_1=0$ と $x_2=1$ の加減乗除だけで得られるので，作図可能な実数である。

(3) 作図可能な実数 a_1，a_2，……，a_n と加減乗除記号と平方根を有限回ずつ使って得られる実数も，作図可能な実数である。

証明 (1) a と b が正の実数の場合は，参考文献〔1〕(数学A教科書 p.91〜94)。また，点 $(a,\ 0)$ の原点 P_1 に関する対称点 $(-a,\ 0)$ も作図できるので，a または b が0以下の実数の場合にも命題は成り立つ。

(2) 0と1を何回か加減することにより整数を得る。整数の除法から有理数を得る。

(3) (1)を繰り返す。 終

［命題5］ 作図できる直線，円および点

以下の文字 a，b，c，d，e，f，g，h，A，B，C，D，G，H は，それぞれ x_1，y_1，x_2，y_2，……，x_n，y_n の加減乗除で表せる実数を示す。

(1) 確認3(1)の直線 L_{ij} と円 C_{rst} の方程式は次の形に書ける。

(ア) $y=ax+b$ または $x=c$ ……②

(イ) $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ ……③

(2) 確認3(2)の点 $P_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ の座標は次の形に書ける。

$$x_{n+1}=g+h\sqrt{D},\quad y_{n+1}=G+H\sqrt{D}$$

証明 (1) 次の方程式を展開整頓すればよい。

(ア) $y-y_i=\dfrac{y_j-y_i}{x_j-x_i}(x-x_i)$

または $x=x_i$

(イ) $(x-x_r)^2+(y-y_r)^2=(x_s-x_t)^2+(y_s-y_t)^2$

(2) 確認3(2)において，(ウ)の場合は，②の形をした2元連立1次方程式を解く。

例えば，$y=ax+b$ と $y=cx+d$ のときは，交点があれば

$$x=-\frac{b-d}{a-c},\quad y=-a\frac{b-d}{a-c}+b$$

となり，$x_{n+1}=g$，$y_{n+1}=G$ の形に書ける。(特に，$D=0$ である。)

$x=c$ の形の方程式を含むときも同様。

㈤の場合は，

②と③の形をした2元連立方程式において，②を③に代入して，x（またはy）の2次方程式
$Ax^2+Bx+C=0$ を得る。交点があるときは2次方程式の解の公式により，

$$x=-\frac{B}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}$$

となり，x_{n+1}（または y_{n+1}）について

$$x_{n+1}=g+h\sqrt{D}$$

の形に書ける。

②により，他方も

$$y_{n+1}=G+H\sqrt{D}$$

の形に書ける。

㈥の場合は，

③の形をした2元連立2次方程式

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$x^2+y^2+dx+ey+f=0$$

を解く。点 P_{n+1} は円 C_{rst} と2円の共通弦（直線）Lとの交点でもあるが，Lの方程式は

$$(a-d)x+(b-e)y+(c-f)=0$$

であり，これは②の形に書ける。したがって，㈤の場合と同様の結果を得る。 終

［命題6］　鍵となる命題

有理数係数の3次方程式 $f(x)=0$ が有理数解をもたなければ，この方程式は作図可能な実数解をもたない。

証明　背理法。もし，$f(x)=0$ が作図可能な実数解 α をもつと仮定すると，確認3のような点の列 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ $(1\leqq k\leqq n)$ で，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ が $x_n=\alpha$ を満たし，$k\geqq 2$ のときには各点 P_{k+1} が P_1，P_2，……，P_k から作図されるものが存在する。

なお，$f(x)$ の最高次の係数は1としてよい。

さて，仮定により3次方程式 $f(x)=0$ の実数解はどれも x_1，y_1，x_2，y_2 の加減乗除で表せる数（有理数）ではないので，次の㈦と㈧を満たす番号m $(2\leqq m\leqq n-1)$ が存在する。

㈦　$f(x)=0$ の実数解はどれも x_1，y_1，x_2，y_2，……，x_m，y_m の加減乗除では表せない。

㈧　$f(x)=0$ の実数解のうち，少なくとも1つが x_1，y_1，x_2，y_2，……，x_m，y_m，x_{m+1}，y_{m+1} の加減乗除で表せる。

このとき，㈧を満たす実数解の1つを改めてαとおく。なお，以下で新しく現れる文字
a，b，c，d，g，h，A，B，D，G，H，a_0，a_1，a_2，……，b_0，b_1，b_2，……，はすべて x_1，y_1，x_2，y_2，……，x_m，y_m の加減乗除で表せる数を示す。

まず，αが

$$\alpha=A+B\sqrt{D}$$

の形に書けることを示す。命題5⑵より，x_{m+1} と y_{m+1} は $z=\sqrt{D}$ として

$$x_{m+1}=g+hz,\ y_{m+1}=G+Hz$$

の形に書けたから，$\underline{x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ x_m,\ y_m,\ z}$ の加減乗除で表せる数である。したがって，㈧によりαもそうであり，αは下線部の文字による分数式の形に書ける。

多変数の分数式は，$\dfrac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ の形に整理できる（分数式を定義する加減乗除記号の個数に関する帰納法で示すことが可能）から，

$$\alpha=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_Mz^M}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots+b_Nz^N}$$

の形に書けることがわかる。$z^2=D$ より，

$$\begin{aligned}\alpha\text{の分子}&=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_Mz^M\\&=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots\cdots\\&\quad+z(a_1+a_3z^2+a_5z^4+\cdots\cdots)\\&=a_0+a_2D+a_4D^2+\cdots\cdots\\&\quad+z(a_1+a_3D+a_5D^2+\cdots\cdots)\\&=a+bz\end{aligned}$$

同様に，分母$=c+dz$ と書けるので，
$c-dz\neq 0$ のときは，

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{a+bz}{c+dz}\\&=\frac{(a+bz)(c-dz)}{(c+dz)(c-dz)}\\&=\frac{ac-bdD}{c^2-d^2D}+\frac{bc-ad}{c^2-d^2D}z\\&=A+B\sqrt{D}\end{aligned}$$

の形に書ける。

$c-dz=0$ のときは，$dz=c$ より

$$\alpha=\frac{a+bz}{2c}=A+B\sqrt{D}$$

の形に書ける。

以上で，$\alpha=A+B\sqrt{D}$ の形に書けることがわかった。これと㈦によれば，$B\neq 0$ かつ，

「$\sqrt{D}$ は x_1，y_1，x_2，y_2，……，x_m，y_m の加減乗除では表せない。……④」

が成り立つ。

また，α（と $A-B\sqrt{D}$）は2次方程式

$$x^2-2Ax+(A^2-B^2D)=0$$

の解であり，実数の範囲で $f(x)$ をこの方程式の左辺で割ると，次のように書ける。

$$f(x)=\{x^2-2Ax+(A^2-B^2D)\}(x-\delta)+px+q \quad \cdots\cdots⑤$$

ここで δ，p，q は，$f(x)$ の係数（有理数）と A，A^2-B^2D の加減乗除で表せるから，

「δ，p，q は，x_1，y_1，x_2，y_2，……，x_m，y_m の加減乗除で表せる数である。……⑥」

このとき，$p=q=0$ を示そう。

実際，もし $p\neq 0$ と仮定すると，

$$x=\alpha=A+B\sqrt{D}$$

を⑤に代入して

$$0=f(\alpha)=p(A+B\sqrt{D})+q \quad \cdots\cdots⑦$$

ここで，$B\neq 0$ であったから

$$\sqrt{D}=-\frac{pA+q}{pB}$$

と表せて，④に反する。

ゆえに，$p=0$ であり，⑦により $q=0$ となる。

すると⑤により，δ は $f(x)=0$ の実数解となるが，これは⑥と㋕に矛盾する。 終

§3．まとめ

命題6と命題7⑴を用いて定理8を示す。

［命題7］ 角が作図できる条件

⑴ 大きさ θ の角が作図できる，すなわち，線分 P_1P_2 に対して，$\angle P_2P_1Q=\theta$ となる点Qが作図できるための必要十分条件は，$\cos\theta$ が作図可能な実数となることである。

⑵ 60° の角は作図できる。すなわち，$\angle P_2P_1R=60^\circ$ となる点Rが作図できる。

証明 ⑴ 点 P_1 を中心とし半径が $P_1P_2=1$ の円 C_{112}（確認3⑴）を描く。

$\angle P_2P_1Q=\theta$ となる点Qが作図できれば，半直線 P_1Q と円の交点から x 軸に下ろした垂線の足が $(\cos\theta,\ 0)$ となる。逆も同様。

⑵ $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ が有理数であるから。実際，2円 C_{112} と C_{212} の交点の1つをRとすればよい。終

［定理8］ 主題

定規とコンパスを用いる作図において

⑴ $\cos 20^\circ$ は作図可能な実数ではない。

⑵ 20° の角は作図できない。

したがって，60° の角の3等分線は作図できない。

⑶ $\sqrt[3]{2}$ は作図可能な実数ではない。

証明 ⑴ 命題2⑵⑶により，$\cos 20^\circ$ は3次方程式 $8x^3-6x-1=0$ の実数解であるが，方程式は有理数解をもたない。命題6によれば，$\cos 20^\circ$ は作図可能な実数ではない。

⑵ 前半は⑴と命題7⑴による。後半は，もし 60° の角の3等分線が作図できれば，20° の角が作図できてしまうから。

⑶ $\sqrt[3]{2}$ は，方程式 $f(x)=x^3-2=0$ の実数解であるが，この方程式は有理数解をもたない。実際，$f(x)=0$ が有理数の解 α をもてば，$\alpha=\pm 1,\ \pm 2$ しかあり得ない（命題1）が，いずれの場合も $f(\alpha)\neq 0$ となるから。再び命題6により結論を得る。 終

§4．最後に

定理8の証明については，体論（大学数学）を用いるものが参考文献〔2〕〔3〕にありますが，今回の複素数を用いない高校数学による表現は，平成22年度名古屋大学数学アゴラ（夏休みに実施される講演会）において，鈴木浩志准教授の講演「Gaussの和を計算してみよう」を伺う中で思いつきました。貴重な講演をして頂いた鈴木先生に，この場をお借りして感謝の意を表したいと思います。有り難うございました。

《参考文献》

〔1〕 高等学校数学科用　数学A（教科書）$p.91\sim p.94$，数学Ⅱ（教科書）　数研出版

〔2〕 矢野健太郎著　一松信解説　角の三等分　ちくま学芸文庫　$p.40\sim p.51$，$p.61\sim p.66$，$p.103\sim p.148$

〔3〕 エミール・アルティン著　寺田文行訳　ガロア理論入門　ちくま学芸文庫　$p.162\sim p.167$

（広島県　広島市立基町高等学校）