

答がきれいになるような問題作成法

—放物線の接線と円の接線を求める問題—

はしぐち まさし
橋口 正

§1. はじめに

授業や小テストで取り扱う問題は、きれいな答(答が整数であること)になるようなものが望ましい。答が無理数や分数になると、計算の苦手な生徒は、途中で計算間違いをしてしまい、正しい答までたどりつけない。また、計算に苦勞するために、問題の本質を見失いかねない。

したがって、筆者は授業(特に導入部分)や演習では、答がきれいな(簡単な)数字になるような問題を取り扱うように心がけている。しかし、問題によっては、その作問が容易でない場合があり、演習授業や個別指導の際に、そのような問題を簡単に作る方法はないかと考えることがある。理解の定着を図る場合の問題作成法を考える際は、

1. 作り方が簡単で教師にとって覚えやすいこと
2. 作成とほぼ同時に答まで用意できること
3. 答がきれいになること(大きすぎるのも不可)などが条件になるであろう。

本稿では、放物線と円について、曲線外の点Pから引いた接線の方程式を求める問題を生徒に出題する場合、きれいな答になるための点Pの決め方を考察し、かつ点Pを決めるとほぼ同時に答も用意できる1つの方法を述べてみたい。

§2. 放物線の外から接線を引く問題の作成法について

放物線Cの方程式を $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c は整数かつ $a>0$) ……(*) と定める。放物線Cに点P(p, q) (ただし、 $q<f(p)$ とする)から引いた接線 l を求めるとき、接点の座標が整数になり、かつ接線 l の方程式の係数が整数になるための点Pの座標の決め方を考える。

まず、放物線 $y=f(x)$ 上の点を $T(t, f(t))$ とおく。点Tにおける接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (2at+b)(x-t) + at^2 + bt + c \\ &= (2at+b)x - at^2 + c \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

これが、点P(p, q)を通るとき

$$\begin{aligned} q &= (2at+b)p - at^2 + c \\ \therefore at^2 - 2apt + q - bp - c &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots ②$$

②の判別式をDとおくと

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (ap)^2 - a(q - bp - c) \\ &= a(ap^2 + bp + c) - aq = a(f(p) - q) \end{aligned}$$

であるから②の解は

$$t = \frac{ap \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{ap \pm \sqrt{a(f(p) - q)}}{a}$$

t を有理数にするためには、 $a(f(p) - q)$ を平方数にすればよい。すなわち、 n を正の整数として

$$f(p) - q = an^2$$

のときを考えると、 $q = f(p) - an^2$ であるから

$$P(p, q) = (p, f(p) - an^2)$$

これは、点Pが、放物線C上の点S($p, f(p)$)から $a \times (\text{平方数})$ だけ下に下がった点であることを示している。このとき、②を解くと

$$t = \frac{ap \pm an}{a} = p \pm n$$

このとき、 p が整数であれば、 t も整数となり、接線①の係数もすべて整数となる。

注意 $f(p) - q \neq an^2$ でも $a(f(p) - q)$ が平方数になる場合がある。例えば、 $a = em^2$ (e, m は自然数) のとき、 $f(p) - q = en^2$ とすれば

$$\frac{D}{4} = a(f(p) - q) = aen^2 = (emn)^2$$

であるから、②を解くと

$$t = \frac{ap \pm emn}{a} = p \pm \frac{emn}{em^2} = p \pm \frac{n}{m}$$

となり、解は有理数となる。しかし、本稿では、簡

単に作問するという趣旨にのっとり $f(p)-q=an^2$ が平方数となる場合を扱うことにする。

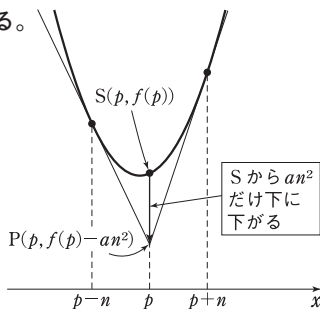
以上のことを手順にまとめると次のようになる。

手順1 放物線CとC上の格子点を決める。

放物線 $C: y=f(x)$ を(*)のように決め、 p を整数として、 C 上に点 $S(p, f(p))$ をとる。すなわち、放物線上に格子点 S をとる。

手順2 点Pを決める。

点 S から an^2 (n は自然数) だけ下へ下がった点 $P(p, f(p)-an^2)$ から接線を引くという問題にする。(問題作成は、これで完了している。)



手順3 接点の座標を求める。

$t=p\pm n$ であるから、

接点の座標は、 $(p\pm n, f(p\pm n))$ (複号同順)

手順4 接線の方程式を求める。

接線の方程式は、

$y=f'(p\pm n)(x-p\pm n)+f(p\pm n)$ (複号同順)

または、 $y=f(x)-a\{x-(p\pm n)\}^2$ としてもよい。

この手順によると、例えば次のような問題を即座に作成し、ほぼ同時に答を求めることができる。特に、 $a=1$ とすれば、作問はさらに簡単になる。

例題1 放物線 $C: y=x^2-x+1$ に、 $P(1, -3)$ から引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ。

以下に作問の手順を示し、答を求めてみる。

手順1 放物線 C を $y=x^2-x+1$ と決め、その曲線上に格子点 $S(1, 1)$ を選ぶ。

手順2 $a=1$ なので点 S から平方数 n^2 だけ下へ下って P を決める。ここでは $n=2$ と決めて S から $n^2=4$ だけ下がった $P(1, -3)$ から接線を引く問題にした。

(問題作成は、これで完了している。)

手順3 接点の x 座標は、 $1\pm n=1\pm 2=-1, 3$

よって、接点の座標は $A(-1, 3), B(3, 7)$

手順4 接線の方程式は、

$y=x^2-x+1-(x+1)^2=-3x$ および

$y=x^2-x+1-(x-3)^2=5x-8$

例題1では、 $S(1, 1), n=2$ としたが、 $n=1, 3$ などとすれば、 P は、それぞれ $(1, 0), (1, -8)$ になる。同様に、例を挙げてみると

$S(2, 3)$ のとき、 P を $(2, 2), (2, -1), (2, -6)$

$S(3, 7)$ のとき、 P を $(3, 6), (3, 3), (3, -2)$

$S(0, 1)$ のとき、 P を $(0, 0), (0, -3), (0, -8)$

として、 P から接線を引けば、接点は必ず格子点になる。したがって、接線の方程式の係数も整数になる。他にも無数に候補をあげることができる。

$a=2$ のときの問題を作ってみると

例題2 放物線 $C: y=2x^2-3x+4$ に $P(1, 1)$ から引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ。

以下に作問の手順を示し、答を求めてみる。

手順1 放物線 $C: y=2x^2-3x+4$ と C 上の格子点 $S(1, 3)$ を決める。

手順2 $n=1$ と決めて、 S から $2\times n^2=2$ だけ下へ下って、 $P(1, 1)$ とした。

(問題作成は、これで完了している。)

手順3 接点の x 座標は、 $1\pm n=1\pm 1=0, 2$

よって、接点の座標は $A(0, 4), B(2, 6)$

手順4 接線の方程式は、それぞれ

$y=2x^2-3x+4-2x^2=-3x+4$

$y=2x^2-3x+4-2(x-2)^2=5x-4$

このように、接点や接線がわかっているならば、よく知られている面積の公式などに容易に当てはめることができる。例えば、 $f(x)=ax^2+bx+c$ のとき、放物線 $y=f(x)$ と、この放物線に $P(p, p-an^2)$ から引いた2本の接線で囲まれた部分の面積 S は、

$$S = \frac{a}{12} \{(p+n)-(p-n)\}^3 = \frac{2}{3} an^3$$

§3. 円の外から接線を引く問題の作成法について

次に、円外の点 P から接線を引くとき、接点の座標がきれいになるような点 P を決める方法を考える。

ここでの円の中心は原点 O とする。まず、平面上の点 $S(a, b)$ を格子点とし、点 S を通る原点中心の円を $C: x^2+y^2=r^2$ とすると、点 S における接線 l の方程式は、 $ax+by=r^2$ であり、係数はすべて整数である。次に l 上にうまく格子点 P を見つけて、その点からもう1つの接線 l' を引けば、接線 l の

接点は格子点Sであるから、 l' の係数は有理数、接点は有理点となることがわかる。そこで、 $\vec{OS}=(a, b)$ に対して、 $\vec{u}=(b, -a)$ とすると、 $\vec{OS} \perp \vec{u}$ であるから、 n を自然数として、

$$\vec{OP} = \vec{OS} + n \times \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nb \\ b-na \end{pmatrix}$$

によって、格子点Pを決めると、点Pは、点Sにおける円Cの接線 l 上の点であり、 $SP=nr$ である。このように、SPが円の半径の整数倍になるように点Pを決める。例えば、 $n=2$ とすれば、 $P(a+2b, b-2a)$ は l 上の点である。これは、下の図のように、Sの x 座標を2倍して y 座標に加え、 y 座標を2倍して x 座標から引くという要領でPの座標を決める。

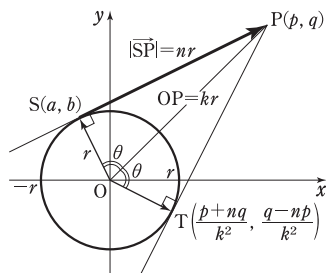
$n \times b$ を a に加える

$$S(a, b) \implies P(a+nb, b-na)$$

$n \times a$ を b から引く

例：S(1, 3), $n=2$ なら $(1+2 \times 3, 3-2 \times 1)=(7, 1)$
(問題作成は、これで完了している。)

ここで、
 $k = \sqrt{1+n^2}$,
 $\cos \theta = \frac{1}{k}$,
 $\sin \theta = \frac{n}{k}$,
 $\vec{OP} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$



とおくと、

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nb \\ b-na \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

よって、 $|\vec{OP}| = k\sqrt{a^2+b^2} = kr$ であるから、 \vec{OP} は、 \vec{OS} を原点Oの周りに $-\theta$ 回転して k 倍したものである。したがって、

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{に更に} \begin{pmatrix} 1 & n \\ -n & 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

が表す一次変換を施したものを \vec{OQ} 、すなわち、

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+nq \\ q-np \end{pmatrix}$$

は、もう1つの接線 l' の法線ベクトルである。これは、SからPを作った要領と同じである。

$n \times q$ を p に加える

$$P(p, q) \implies Q(p+nq, q-np)$$

$n \times p$ を q から引く

l' は点P(p, q)を通るから、 l' の方程式は、

$$(p+nq)x + (q-np)y = (p+nq)p + (q-np)q = p^2 + q^2 = k^2 r^2$$

この両辺を $k^2=1+n^2$ で割ると

$$\frac{p+nq}{1+n^2}x + \frac{q-np}{1+n^2}y = r^2 \text{ となるから、円Cと接線}$$

$$l' \text{ の接点をTとすると } T\left(\frac{p+nq}{1+n^2}, \frac{q-np}{1+n^2}\right)$$

となる。また、 \vec{OQ} は \vec{OP} を原点Oの周りに $-\theta$ 回転して k 倍したものであるから、

$$|\vec{OQ}| = k|\vec{OP}| = k^2|\vec{OS}| = k^2 r = k^2 |\vec{OT}|$$

$$\therefore \vec{OT} = \frac{1}{k^2} \vec{OQ} = \frac{1}{1+n^2} (p+nq, q-np)$$

よって $T\left(\frac{p+nq}{1+n^2}, \frac{q-np}{1+n^2}\right)$ としてもよい。

まとめると次のような手順になる。

手順1 格子点S(a, b)を決めて、点Sを通り原点Oを中心とする円C： $x^2+y^2=r^2$ を決める。

例：格子点S(0, 1)を通る円C： $x^2+y^2=1$

格子点S(3, -1)を通る円C： $x^2+y^2=10$

格子点S(2, 1)を通る円C： $x^2+y^2=5$ 等

点Sにおける接線は $ax+by=r^2$ である。

手順2 円外の点Pを決める。

適当に自然数nを決めて点P(a+nb, b-na)をとる。この点Pから接線を引けば、2つの接点は、ともに有理点であり、接線の係数はすべて有理数となっている。

(問題作成は、これで完了している。)

手順3 もう1つの接線 l' を求める。

$P(a+nb, b-na)=(p, q)$ とすると、 l' の法線ベクトルは $\vec{v}=(p+nq, q-np)$ であり、 l' はP(p, q)を通るから、その方程式は

$$(p+nq)x + (q-np)y = p^2 + q^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

手順4 もう1つの接点Tを求める。

手順3の③を $\frac{p+nq}{1+n^2}x + \frac{q-np}{1+n^2}y = r^2$ と変形

することによって $T\left(\frac{p+nq}{1+n^2}, \frac{q-np}{1+n^2}\right)$ となる。

この手順によると、例えば次のような問題を即座に作成し、ほぼ同時に答を求めることができる。

例題3 円 $x^2+y^2=5$ にP(7, -1)から引いた2本の接線の方程式と接点の座標を求めよ。

以下に作問の手順を示し、答を求めてみる。

手順1 格子点としてS(1, 2)を決めると、点Sを通り、原点中心の円は $x^2+y^2=5$ である。格子点(2, 1), (-1, 2)などでも同様に考えることができる。点Sにおける接線の方程式は $x+2y=5$

手順2 $n=3$ と決め、 $(1+3 \times 2, 2-3 \times 1) = (7, -1)$ によって点Pを決める。

(問題作成は、これで完了している。)

手順1の直線 $x+2y=5$ は確かにP(7, -1)を通る。 n を変えることにより、点Pの候補を無数に作ることができる。例えば、

$$n=1 \text{ とすると、} (1+1 \times 2, 2-1 \times 1) = (3, 1)$$

$$n=2 \text{ とすると、} (1+2 \times 2, 2-2 \times 1) = (5, 0)$$

$$n=4 \text{ とすると、} (1+4 \times 2, 2-4 \times 1) = (9, -2)$$

また、S(-1, 2), $n=2$ とすれば、P(3, 4)となる。

手順3 もう1つの接線の法線ベクトル \vec{v} は

$$\vec{v} = (7+3 \times (-1), -1-3 \times 7) = (4, -22)$$

求める接線は、 $(4, -22) \parallel (2, -11)$ を法線ベクトルとし、点Pを通るから、その方程式は、

$$2x - 11y = 2 \times 7 - 11 \times (-1) = 25$$

手順4 円の方程式が $x^2+y^2=5$ であるから

$2x - 11y = 25$ の両辺を5で割って

$$\frac{2}{5}x - \frac{11}{5}y = 5 \text{ と変形することにより}$$

$$\text{接点は } \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

※手順3で $1+n^2=10$ であるから接点の座標は

$$\frac{1}{10}\vec{v} = \left(\frac{4}{10}, \frac{-22}{10}\right) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

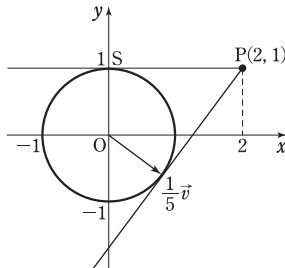
として求めてもよい。

例題4 円 $x^2+y^2=1$ に、P(2, 1)から引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ。

このように、1つの接線がx軸に平行となるような問題はすぐに作れるが、これまでの手順を知っていると、他の接線や接点を次のように容易に求めることができる。

まず、明らかに直線 $y=1$ が接線の1つであり、接点の座標はS(0, 1)である。SP=2が半径の2倍だとすぐわかるので $n=2$ 。

よって、点Pは、 $P(0+2 \times 1, 1-2 \times 0)$ によって



P(2, 1)を決めたものと考えられるから、もう1つの接線の法線ベクトル \vec{v} は

$$\vec{v} = (2+2 \times 1, 1-2 \times 2) = (4, -3)$$

であり、その接線はP(2, 1)を通るからその方程式は、

$$4x - 3y = 4 \times 2 - 3 \times 1 = 5$$

これを $\frac{4}{5}x + \frac{-3}{5}y = 1$ と変形することにより接点

は、 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ である。接点のみを求めたいときは、

$$k^2 = 1 + n^2 = 5 \text{ より } \frac{1}{5}\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

として求めることもできる。

$n=-1, -2, -3, \dots$ のときは、 \overrightarrow{SP} の向きが逆になる。また、 \overrightarrow{OP} は、 \overrightarrow{OS} を原点の周りに θ 回転して k 倍したものとなる。したがって、次のような問題も容易に答を導くことができる。

例題5 円 $x^2+y^2=4$ に、P(2, 4)から引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ。

明らかに直線 $x=2$ が接線の1つであり接点の座標は、S(2, 0)である。SP=4が半径の2倍であることはすぐにわかるので $n=2$ であり、点Pは、

$$P(2+(-2) \times 0, 0-(-2) \times 2)$$

によってP(2, 4)を決めたものと考えられるから、もう1つの接線の法線ベクトル \vec{v} は

$$\vec{v} = (2+(-2) \times 4, 4-(-2) \times 2) = (-6, 8)$$

であり、 $(-6, 8) \parallel (3, -4)$ である。その接線はP(2, 4)を通るからその方程式は、

$$3x - 4y = 3 \times 2 - 4 \times 4 = -10$$

$$\text{これを } \frac{-6}{5}x + \frac{8}{5}y = 4$$

と変形することにより

$$\text{接点は、} \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

である。

また、接点の座標は、 $k^2 = 1 + n^2 = 5$ より

$$\frac{1}{5}\vec{v} = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

として求めることもできる。

この方法で接点を求める場合は、接線の方程式を求める必要はない。

(宮崎県立宮崎大宮高等学校)

