円の接線の見方についての考察

石原（いしはら）　諭（さとし）

§0. はじめに

円の接線の公式における接点を，円外や円内に動かすことにより，接線の公式のもつ意味が広がってきます。ここでは，偶然つながった２通りの見方について述べます。

§1. 円 $x^2+y^2=r^2$ と点 P$(x_0,\ y_0)$ と方程式 $x_0x+y_0y=r^2$ の関係

円 $O：x^2+y^2=r^2$ および点 P$(x_0,\ y_0)$ について，方程式 $x_0x+y_0y=r^2$ は

⑴　点Pが円周上にあるときは，点Pにおける接線の方程式を表す。（これは教科書で学習します。）

⑵　点Pが円の外部にあるときは，点Pから円 O に２本の接線を引き，接点を A，B とするとき，２点 A，B を通る直線の式を表す。（この性質はよく知られています。）

（⑵の理由）　A$(x_1,\ y_1)$ における接線の式は

$x_1x+y_1y=r^2$ であり，これが点Pを通るので

$$x_1x_0+y_1y_0=r^2 \qquad \cdots\cdots①$$

同様にして，B$(x_2,\ y_2)$ とすれば

$$x_2x_0+y_2y_0=r^2 \qquad \cdots\cdots②$$

①，②は，直線 $x_0x+y_0y=r^2$ が点 A，B を通ることを示している。終

⑶　点Pが円の内部にあるときは，点 P$(x_0,\ y_0)$ を通る任意の直線 ℓ を考え，ℓ と円 O との２つの交点を A_ℓ，B_ℓ とする。また，A_ℓ，B_ℓ における円 O の接線を，α_ℓ，β_ℓ とする。
α_ℓ と β_ℓ の交点を E$(X_\ell,\ Y_\ell)$ とすると，ℓ が点Pを通ってかつ，傾きを変えながら変化するとき，点Eの描く軌跡が $x_0x+y_0y=r^2$ となる。

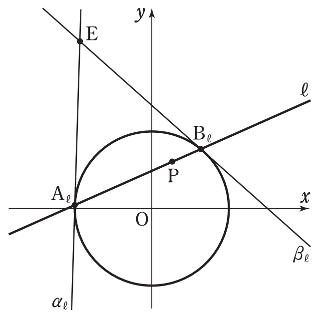
（理由）　ℓ を任意にとり固定する。このとき，E$(X_\ell,\ Y_\ell)$ は円 O の外部にあるので，⑵により

$X_\ell x+Y_\ell y=r^2$

は A_ℓ，B_ℓ を通る直線である。これが点 P$(x_0,\ y_0)$ を通るので代入すると

$X_\ell x_0+Y_\ell y_0=r^2$

が成り立つが，この式は



$x_0x+y_0y=r^2$ 上に E$(X_\ell,\ Y_\ell)$ があることを表している。

よって，ℓ を点Pを通る任意の直線とすれば，点Eは直線 $x_0x+y_0y=r^2$ 上にある。

逆に，$x_0x+y_0y=r^2$ 上の任意の点 E$(X,\ Y)$ をとると，Eから円に２つの接線が引ける。（点Eが円の外部にあることは，直線 $x_0x+y_0y=r^2$ と原点との距離が $\dfrac{|-r^2|}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}>\dfrac{r^2}{r}=r>0$ となることよりわかります。）その接点を A，B とすれば，２点 A，B を通る直線は

$Xx+Yy=r^2 \quad \cdots\cdots①$　である。

一方，E$(X,\ Y)$ は $x_0x+y_0y=r^2$ 上にあるので，$Xx_0+Yy_0=r^2$ を満足している。このことは①，すなわち，A，B を通る直線は点Pを通るということを表している。よって逆も成り立つ。

以上により，証明された。終

§2. 反転との関係

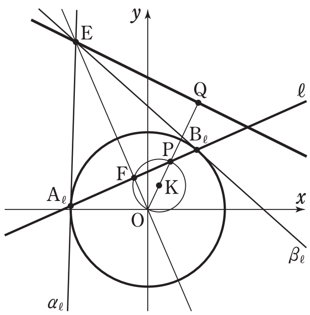
このことは実は反転と関係があることがわかります。

次の図のように，OP を直径とする円 K を考えると α_ℓ と β_ℓ の交点Eは，円 K と直線 OE との交点Fの円 O に関する反転である。

(理由) Qを半直線OPと直線 $x_0x+y_0y=r^2$ との交点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EQ}}$ であることがわかるので，$\angle\mathrm{OQE}=90^\circ$ である。また，$\angle\mathrm{FOP}=\angle\mathrm{QOE}$ であるから，$\triangle\mathrm{OFP}\backsim\triangle\mathrm{OQE}$ となる。
ゆえに，OP：OE＝OF：OQ であるから，

$$\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OF}=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\frac{|-r^2|}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}=r^2$$

よって，点Eは点Fの円Oに関する反転であり，また，点Qは点Pの円Oに関する反転である。終



§3. 感想

結局，点Eの軌跡は円Kの反転像であり，(3)は反転像の軌跡を２つの接線の交点から描いたという「描き方の違い」であるということになります。

数研通信 No.39 の遠藤一成先生と内藤弘嗣先生の記事を読んで，円の接線と反転との関係を初めて知りましたが，この性質はその証明からすぐにわかることであると，後になって気がつきましたので，今回ご報告させていただきました。

《参考文献》

〔１〕 遠藤一成，内藤弘嗣「$x_1x+y_1y=r^2$ と反転について」数研通信 No.39　数研出版

(静岡県立気賀高等学校)