漸化式（差分方程式）を z 変換（離散的ラプラス変換）で解く方法

小金澤（こがねざわ）　貴弘（たかひろ）

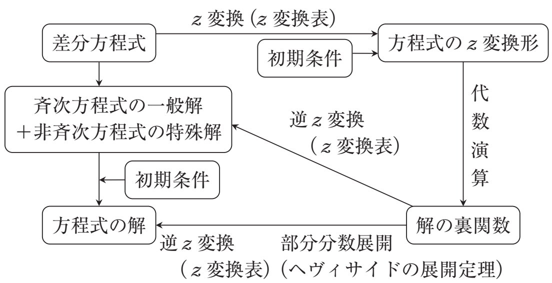
§1. ラプラス変換と z 変換（離散的ラプラス変換）

一般に,「定数係数の線形微分方程式」はラプラス変換を使えば必ず解ける。同様に,「定数係数の線形差分方程式」は z 変換（離散的ラプラス変換）を使えば必ず解ける。

「定数係数の線形差分方程式」は,「斉次差分方程式の一般解」と「非斉次差分方程式の特殊解」の和で与えられるから，未定係数法で比較的容易に解けるのだが，解法が天下り的である上に，パターンが多く解き方も技巧的である。

そこで，差分方程式（漸化式）を z 変換で解く方法についてまとめておく。逆 z 変換の際，部分分数展開が煩雑になることがあるが，機械的な計算だけで解が得られる上に，特性方程式や特殊解がなぜそうなるのかを，完全に説明できる点はたいへん魅力的である。

§2. z 変換による差分方程式の解法の流れ



§3. z 変換表

［定義］（z 変換と逆 z 変換）

z 変換　$Z[x_n]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$

逆 z 変換　$Z^{-1}[X(z)]=x_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$

注意　個々の証明は参考文献参照。
個々の変換を理解する必要はない。
変換表を利用すればよい。

数列	z 変換
x_n	$X(z)$
x_{n+1}	$z^1X(z)-x_0z$
x_{n+2}	$z^2X(z)-x_0z^2-x_1z$
x_{n+3}	$z^3X(z)-x_0z^3-x_1z^2-x_2z$
x_{n+k}	$z^kX(z)-\sum_{j=0}^{k-1} x_j z^{k-j}$

【z 変換表】

数列	z 変換
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
na^n	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
n^2a^n	$\dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
n^3a^n	$\dfrac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$
n^4a^n	$\dfrac{az(z^3+11az^2+11a^2z+a^3)}{(z-a)^5}$
n^ka^n	$\Phi\left(\dfrac{a}{z},\ -k,\ 0\right)$
1	$\dfrac{z}{z-1}$
n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
n^3	$\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$

参考　$\Phi\left(\dfrac{a}{z},\ -k,\ 0\right)$ は，フルヴィッツ・レルヒ（Hurwitz Lerch）の超越関数

【逆 z 変換表】

z 変換	数列
$\dfrac{z}{z-a}$	a^n
$\dfrac{z}{(z-a)^2}$	na^{n-1}
$\dfrac{z}{(z-a)^3}$	${}_n\mathrm{C}_2\cdot a^{n-2}$
$\dfrac{z}{(z-a)^4}$	${}_n\mathrm{C}_3\cdot a^{n-3}$
$\dfrac{z}{(z-a)^5}$	${}_n\mathrm{C}_4\cdot a^{n-4}$
$\dfrac{z}{(z-a)^k}$	${}_n\mathrm{C}_{k-1}\cdot a^{n-k+1}$

z 変換	数列
$\dfrac{z}{z-1}$	1
$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	n
$\dfrac{z}{(z-1)^3}$	${}_n\mathrm{C}_2$
$\dfrac{z}{(z-1)^4}$	${}_n\mathrm{C}_3$
$\dfrac{z}{(z-1)^5}$	${}_n\mathrm{C}_4$
$\dfrac{z}{(z-1)^k}$	${}_n\mathrm{C}_{k-1}$

§4. z 変換による差分方程式の解法の詳細

①番号合わせ

高校数学の漸化式は，初項が a_1 であることが多い。z 変換では，初項を a_0 とする必要があるため，番号合わせが必要となる。

【方法 1】 漸化式と初期条件から a_0 を新たに定義し，そのまま解く。

【方法 2】 $x_0=a_1$，$x_1=a_2$，…… とした上で，漸化式の n に $n+1$ を代入して解き，$a_n=x_{n-1}$，すなわち n に $n-1$ を代入し，一般項を得る。

【方法 3】 $x_0=0$ だと楽になる。方法 2 と同様に番号をずらすとうまくいく。

②部分分数展開

逆 z 変換は，逆ラプラス変換と同様，部分分数展開が必要となる。

【方法 1】 係数比較。「組立除法」や「ガウス・ジョルダン法」を利用すると楽。

【方法 2】 ヘヴィサイドの展開定理。例題の解説参照。

【方法 3】 文字係数のまま，部分分数展開を逆 z 変換し，「斉次方程式の一般解＋非斉次方程式の特殊解」として解き進める。

§5. 斉次 3 階差分方程式（隣接 4 項間漸化式）

(1) $a_1=0,\ a_2=6,\ a_3=60,\ a_{n+3}-10a_{n+2}+31a_{n+1}-30a_n=0$

(2) $a_1=0,\ a_2=-2,\ a_3=-14,\ a_{n+3}-7a_{n+2}+16a_{n+1}-12a_n=0$

(3) $a_1=-2,\ a_2=4,\ a_3=56,\ a_{n+3}-6a_{n+2}+12a_{n+1}-8a_n=0$

(4) $a_1=0,\ a_2=-2,\ a_3=-12,\ a_{n+3}-6a_{n+2}+11a_{n+1}-6a_n=0$

(5) $a_1=0,\ a_2=2,\ a_3=10,\ a_{n+3}-5a_{n+2}+8a_{n+1}-4a_n=0$

(6) $a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=4,\ a_{n+3}-4a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$

(7) $a_1=6,\ a_2=11,\ a_3=18,\ a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n=0$

(8) $a_1=0,\ a_2=2,\ a_3=8,\ a_{n+3}-4a_{n+2}+6a_{n+1}-4a_n=0$

(9) $a_1=-3,\ a_2=6,\ a_3=-6,\ a_{n+3}+2a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=0$

解説

(1) $a_0=0$，z 変換を $Z[a_n]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$ とすると

$z^3X(z)-6z-10z^2X(z)+31zX(z)-30X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{6z}{(z-2)(z-3)(z-5)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{-3z}{z-3}+\frac{z}{z-5}$$

逆 z 変換 $Z^{-1}[X(z)]=a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$

から $a_n=2^{n+1}-3^{n+1}+5^n$

参考 $\dfrac{6z}{(z-2)(z-3)(z-5)}=\dfrac{Az}{z-2}+\dfrac{Bz}{z-3}+\dfrac{Cz}{z-5}$

とおき，$\times\dfrac{z-2}{z}\to z=2$ 代入で，$A=\dfrac{6}{(-1)\cdot(-3)}=2$，

$\times\dfrac{z-3}{z}\to z=3$ 代入で，$B=\dfrac{6}{1\cdot(-2)}=-3$，

$\times\dfrac{z-5}{z}\to z=5$ 代入で，$C=\dfrac{6}{3\cdot2}=1$ と暗算する。

(2) $a_0=0$ とすると

$z^3X(z)+2z-7z^2X(z)+16zX(z)-12X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{-2z}{(z-2)^2(z-3)}=\frac{2z}{(z-2)^2}+\frac{2z}{z-2}+\frac{-2z}{z-3}$$

よって $a_n=n\cdot2^n+2\cdot2^n-2\cdot3^n=(n+2)\cdot2^n-2\cdot3^n$

参考 $\dfrac{-2z}{(z-2)^2(z-3)}=\dfrac{Az}{(z-2)^2}+\dfrac{Bz}{z-2}+\dfrac{Cz}{z-3}$

とおき，$\times\dfrac{z-3}{z}\to z=3$ 代入で，$C=\dfrac{-2}{1^2}=-2$，

$\times\dfrac{(z-2)^2}{z}\to z=2$ 代入で，$A=\dfrac{-2}{-1}=2$，

$\times\dfrac{(z-2)^2}{z}\to$ 微分 $\to z=2$ 代入で，$B=\dfrac{-(-2)\cdot1}{(-1)^2}=2$

(3) $a_0=1$ とすると

$z^3X(z)-z^3+2z^2-4z-6\{z^2X(z)-z^2+2z\}$

$+12\{zX(z)-z\}-8X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{z^3-8z^2+28z}{(z-2)^3}$$

$$=\frac{16z}{(z-2)^3}+\frac{-4z}{(z-2)^2}+\frac{z}{z-2}$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -8 & 28 \\
2 & & 2 & -12 \\ \hline
 & 1 & -6 & \boxed{16} \\
2 & & 2 & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-4} &
\end{array}$$

よって

$$a_n=16\cdot{}_n\mathrm{C}_2\cdot2^{n-2}-4n\cdot2^{n-1}+2^n$$

$$=(2n^2-4n+1)\cdot2^n$$

参考 $\dfrac{z^3-8z^2+28z}{(z-2)^3}=\dfrac{(z-2)\{1\cdot(z-2)-4\}+16}{(z-2)^3}$

$$=\frac{16z}{(z-2)^3}+\frac{-4z}{(z-2)^2}+\frac{z}{(z-2)}$$

(4) $a_0=0$ とすると

$z^3X(z)+2z-6z^2X(z)+11zX(z)-6X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{-2z}{(z-2)(z-3)(z-1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{-z}{z-3}+\frac{-z}{z-1}$$

よって　$a_n=2^{n+1}-3^n-1$

参考　$\dfrac{-2z}{(z-2)(z-3)(z-1)}=\dfrac{Az}{z-2}+\dfrac{Bz}{z-3}+\dfrac{Cz}{z-1}$ とおくと，$\times\dfrac{z-2}{z}\to z=2$ 代入で，$A=\dfrac{-2}{1\cdot(-1)}=2$，

$\times\dfrac{z-3}{z}\to z=3$ 代入で，$B=\dfrac{-2}{2\cdot 1}=-1$，

$\times\dfrac{z-1}{z}\to z=1$ 代入で，$C=\dfrac{-2}{(-1)\cdot(-2)}=-1$

(5) $a_0=0$ とすると

$z^3X(z)-2z-5z^2X(z)+8zX(z)-4X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{2z}{(z-2)^2(z-1)}=\frac{2z}{(z-2)^2}+\frac{-2z}{z-2}+\frac{2z}{z-1}$$

よって　$a_n=(n-2)\cdot 2^n+2$

参考　$\dfrac{2z}{(z-2)^2(z-1)}=\dfrac{Az}{(z-2)^2}+\dfrac{Bz}{z-2}+\dfrac{Cz}{z-1}$ とおくと，$\times\dfrac{(z-2)^2}{2}\to z=2$ 代入で，$A=\dfrac{2}{1}=2$，

$\times\dfrac{(z-2)^2}{z}\to$ 微分 $\to z=2$ 代入で，$B=\dfrac{-2\cdot 1}{1^2}=-2$，

$\times\dfrac{z-1}{z}\to z=1$ 代入で，$C=\dfrac{2}{(-1)^2}=2$

(6) $a_0=3$ とすると

$z^3X(z)-z-4z^2X(z)+5zX(z)-2X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{z}{z-2}+\frac{-z}{(z-1)^2}+\frac{-z}{z-1}$$

よって　$a_n=2^n-n-1$

(7) $a_0=3$ とすると

$z^3X(z)-3z^3-6z^2-11z-3\{z^2X(z)-3z^2-6z\}$
$+3\{zX(z)-3z\}-X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{3z^3-3z^2+2z}{(z-1)^3}$$

$$=\frac{2z}{(z-1)^3}+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{3z}{z-1}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 3 & 0 \\ \hline & 3 & 0 & \boxed{2} \\ 1 & & 3 & \\ \hline & 3 & \boxed{3} & \end{array}$$

よって

$a_n=2\cdot{}_nC_2+3n+3=n^2+2n+3$

(8) $a_0=0$ とすると

$z^3X(z)-2z-4z^2X(z)+6zX(z)-4X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{2z}{(z-2)(z^2-2z+2)}$$

$$=\frac{z}{z-2}+\frac{-1+i}{2}\cdot\frac{z}{z-(1+i)}+\frac{-1-i}{2}\cdot\frac{z}{z-(1-i)}$$

よって

$$a_n=2^n+\frac{-1+i}{2}\cdot(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}})^n+\frac{-1-i}{2}\cdot(\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{4}})^n$$

$$=2^n-(\sqrt{2}\,)^n\left\{\frac{1}{2}(e^{\frac{n\pi i}{4}}+e^{-\frac{n\pi i}{4}})-i^2\cdot\frac{1}{2i}(e^{\frac{n\pi i}{4}}-e^{-\frac{n\pi i}{4}})\right\}$$

$$=2^n-(\sqrt{2}\,)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

参考　$X(z)=\dfrac{Az}{z-2}+\dfrac{Bz}{z-(1+i)}+\dfrac{Cz}{z-(1-i)}$ とおくと，$\times\dfrac{z-2}{z}\to z=2$ 代入で，$A=\dfrac{2}{1\cdot 2}=1$，

$\times\dfrac{z-(1+i)}{z}\to z=1+i$ 代入で，

$B=\dfrac{2}{(-1+i)\cdot 2i}=\dfrac{1}{-1-i}=\dfrac{-1+i}{2}$，$C$ は係数比較で $A+B+C=0$ から $C=\dfrac{-1-i}{2}$

(9) $a_0=0$ とすると

$z^3X(z)+3z^2-6z+2\{z^2X(z)+3z\}+2zX(z)+X(z)=0$ から

$$X(z)=\frac{-3z^2}{(z+1)(z^2+z+1)}$$

$z^2+z+1=0$ の解を，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると

$$X(z)=\frac{3z}{z+1}+\frac{-3+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{z}{z-\alpha}+\frac{-3-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{z}{z-\beta}$$

したがって

$$a_n=3\cdot(-1)^n+\frac{-3+\sqrt{3}\,i}{2}(e^{\frac{2\pi i}{3}})^n+\frac{-3-\sqrt{3}\,i}{2}(e^{-\frac{2\pi i}{3}})^n$$

$$=3\cdot(-1)^n-3\cos\frac{2n\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

参考　$X(z)=\dfrac{Az}{z+1}+\dfrac{Bz}{z-\alpha}+\dfrac{Cz}{z-\beta}$ とおくと

$\times\dfrac{z+1}{z}\to z=-1$ 代入で，$A=\dfrac{-3\cdot(-1)}{1-1+1}=3$

$\times\dfrac{z-\alpha}{z}\to z=\alpha$ 代入で，$B=\dfrac{-3\alpha}{(\alpha+1)(\alpha-\beta)}$

$=\dfrac{-3(-1+\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)\sqrt{3}\,i}=\dfrac{-3+\sqrt{3}\,i}{2}$，

C は係数比較で $A+B+C=0$ から $C=\dfrac{-3-\sqrt{3}\,i}{2}$

として求めるが，以下の別解が楽である。

別解　$X(z)=\dfrac{3z}{z+1}+\dfrac{Bz}{z-\alpha}+\dfrac{Cz}{z-\beta}$ から

$$a_n=3\cdot(-1)^n+B(e^{\frac{2\pi i}{3}})^n+C(e^{-\frac{2\pi i}{3}})^n$$

$B'=B+C$，$C'=(B-C)i$ として

$a_n=3\cdot(-1)^n+B'\cos\dfrac{2n\pi}{3}+C'\sin\dfrac{2n\pi}{3}$ とおける。

$a_0=3+B'=0$, $a_1=-3-\dfrac{1}{2}B'+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C'=-3$ から

$$B'=-3,\ C'=-\sqrt{3}$$

よって　$a_n=3\cdot(-1)^n-3\cos\dfrac{2n\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$

§6. 非斉次1階差分方程式(隣接2項間漸化式)

(1)　$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$

(2)　$a_1=6$, $a_{n+1}=2a_n+3n+4$

(3)　$a_1=-7$, $a_{n+1}=3a_n-4\cdot5^n$

(4)　$a_1=8$, $a_{n+1}=2a_n+3\cdot2^{n+1}$

解説

(1)　$a_0=0$ とすると，$zX(z)=2X(z)+\dfrac{z}{z-1}$ から

$$X(z)=\frac{z}{(z-2)(z-1)}=\frac{z}{z-2}+\frac{-z}{z-1}$$

よって　$a_n=2^n-1$

(2)　$a_0=1$ とすると，

$$zX(z)-z=2X(z)+\frac{3z}{(z-1)^2}+\frac{4z}{z-1}\ \text{から}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-2}+\frac{4z^2-z}{(z-2)(z-1)^2}$$

$$=\frac{z}{z-2}+\frac{7z}{z-2}+\frac{-3z}{(z-1)^2}+\frac{-7z}{z-1}$$

よって　$a_n=8\cdot2^n-3n-7=2^{n+3}-3n-7$

参考　$\dfrac{4z^2-z}{(z-2)(z-1)^2}=\dfrac{Az}{z-2}+\dfrac{Bz}{(z-1)^2}+\dfrac{Cz}{z-1}$

とおくと，$\times\dfrac{z-2}{z}\to z=2$ 代入で，$A=\dfrac{8-1}{1^2}=7$

$\times\dfrac{(z-1)^2}{z}\to z=1$ 代入で，$B=\dfrac{4-1}{-1}=-3$，C は，

z^3 の係数比較から $A+C=7+C=0$ として，$C=-7$

(3)　$a_0=-1$ とし，$zX(z)+z=3X(z)+\dfrac{-4z}{z-5}$ から

$$X(z)=\frac{-z}{z-3}+\frac{-4z}{(z-3)(z-5)}=\frac{-z}{z-3}+\frac{2z}{z-3}+\frac{-2z}{z-5}$$

よって　$a_n=3^n-2\cdot5^n$

(4)　$a_0=1$ とし，$zX(z)-z=2X(z)+\dfrac{6z}{z-2}$ から

$$X(z)=\frac{6z}{(z-2)^2}+\frac{z}{z-2}$$

よって　$a_n=3n\cdot2^n+2^n=(3n+1)\cdot2^n$

§7. 非斉次2階差分方程式(隣接3項間漸化式)

(1)　$a_1=-3$, $a_2=-5$, $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=6\cdot5^n+4$

(2)　$a_1=2$, $a_2=18$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=2^{n+3}-2n+2$

(3)　$a_1=1$, $a_2=3$,

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=n\cdot2^{n+2}+2^{n+1}+2n-2$

(4)　$a_1=4$, $a_2=11$, $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2^n+6n+4$

解説

(1)　$a_1=0$ とすると，

$$z^2X(z)+3z-5zX(z)+6X(z)=\frac{6z}{z-5}+\frac{4z}{z-1}\ \text{から}$$

$$X(z)=\frac{-3z}{(z-2)(z-3)}+\frac{10z^2-26z}{(z-2)(z-3)(z-5)(z-1)}$$

$$=\frac{z}{z-2}+\frac{-4z}{z-3}+\frac{z}{z-5}+\frac{2z}{z-1}$$

よって　$a_n=2^n-4\cdot3^n+5^n+2$

(2)　$a_0=0$ とすると，

$$z^2X(z)-2z-4zX(z)+4X(z)$$

$$=\frac{8z}{z-2}+\frac{-2z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-1}\ \text{から}$$

$$X(z)=\frac{2z}{(z-2)^2}+\frac{8z}{(z-2)^3}+\frac{2z^2-4z}{(z-2)^2(z-1)^2}$$

$$=\frac{8z}{(z-2)^3}+\frac{2z}{(z-2)^2}+\frac{2z}{z-2}+\frac{-2z}{(z-1)^2}+\frac{-2z}{z-1}$$

よって　$a_n=8\cdot{}_nC_2\cdot2^{n-2}+2\cdot n\cdot2^{n-1}+2\cdot2^n-2n-2$

$=(n^2+2)\cdot2^n-2n-2$

参考　$\dfrac{2z^2-4z}{(z-2)^2(z-1)^2}=\dfrac{2z}{(z-2)(z-1)^2}$

$$=\frac{Az}{z-2}+\frac{Bz}{(z-1)^2}+\frac{Cz}{z-1}$$

とおくと，$A=2$，$B=-2$ は暗算可能。

$\times\dfrac{(z-1)^2}{z}\to$微分$\to z=1$ 代入で，$C=\dfrac{0-2\cdot1}{(-1)^2}=-2$

(3)　$a_0=0$ とすると，

$$z^2X(z)-z-3zX(z)+2X(z)$$

$$=\frac{8z}{(z-2)^2}+\frac{2z}{z-2}+\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{-2z}{z-1}\ \text{から}$$

$$X(z)=\frac{z}{(z-2)(z-1)}+\frac{12z^3-30z^2+20z}{(z-2)^3(z-1)^3}$$

$$=\frac{8z}{(z-2)^3}+\frac{-6z}{(z-2)^2}+\frac{7z}{z-2}+\frac{-2z}{(z-1)^3}+\frac{-7z}{z-1}$$

よって

$a_n=8\cdot{}_nC_2\cdot2^{n-2}-6\cdot n\cdot2^{n-1}+7\cdot2^n-2\cdot{}_nC_2-7$

$=(n^2-4n+7)\cdot2^n-n^2+n-7$

参考　$\dfrac{12z^3-30z^2+20z}{(z-2)^3(z-1)^3}=\dfrac{Az}{(z-2)^3}+\dfrac{Bz}{(z-2)^2}$

$+\dfrac{Cz}{z-2}+\dfrac{Dz}{(z-1)^3}+\dfrac{Ez}{(z-1)^2}+\dfrac{Fz}{z-1}$ とおくと，

$\times\dfrac{(z-2)^3}{z}\to z=2$ 代入で，$A=8$

同様にして，$D=-2$，

$\times\dfrac{(z-2)^3}{z}\to$ 微分 $\to z=2$ 代入で，$B=-6$

$\times\dfrac{(z-1)^3}{z}\to$ 微分 $\to z=1$ 代入で，$E=0$

$\times\dfrac{(z-1)^3}{z}\to 2$ 階微分 $\to z=1$ 代入で，$2F=-12$

から $F=-6$,

分子 z^6 の係数比較 $C+F=0$ から $C=6$

(4) $a_0=2$ とすると，

$$z^2X(z)-2z^2-4z-2\{zX(z)-2z\}+X(z)$$
$$=\frac{z}{z-2}+\frac{6z}{(z-1)^2}+\frac{4z}{z-1}\ \text{から}$$

$$X(z)=\frac{2z^2}{(z-1)^2}+\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}+\frac{6z}{(z-1)^4}+\frac{4z}{(z-1)^3}$$
$$=\left\{\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{z-1}\right\}+\left\{\frac{z}{z-2}+\frac{-z}{(z-1)^2}+\frac{-z}{z-1}\right\}+\frac{6z}{(z-1)^4}+\frac{4z}{(z-1)^3}$$
$$=\frac{z}{z-2}+\frac{6z}{(z-1)^4}+\frac{4z}{(z-1)^3}+\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

よって　$a_n=2^n+6\cdot{}_nC_3+4\cdot{}_nC_2+n+1$
$$=2^n+n^3-n^2+n+1$$

参考　第 1 項は $2z^2=2z(z-1)+2z$ から部分分数展開。第 2 項はヘヴィサイドの展開定理＋最高次の係数比較で暗算。

§8. 非斉次連立漸化式

$$\begin{cases}a_0=1\\ b_0=0\end{cases},\ \begin{cases}a_{n+1}=4a_n+2b_n+6\\ b_{n+1}=-a_n+b_n-4\end{cases}$$

解説

$$\begin{cases}zX(z)-z=4X(z)+2Y(z)+\dfrac{6z}{z-1}\\ zY(z)=-X(z)+Y(z)+\dfrac{-4z}{z-1}\end{cases}$$

下式から $Y(z)=\dfrac{-X(z)}{z-1}+\dfrac{-4z}{(z-1)^2}$

上式に代入して

$$(z-4)X(z)=z+\frac{6z}{z-1}+\frac{-8z}{(z-1)^2}+\frac{-2X(z)}{z-1}$$

$z-1$ を掛けて

$$(z^2-5z+4+2)X(z)=z(z-1)+6z+\frac{-8z}{z-1}$$

よって

$$X(z)=\frac{z^3+4z^2-13z}{(z-2)(z-3)(z-1)}=\frac{z}{z-2}+\frac{4z}{z-3}+\frac{-4z}{z-1}$$

ゆえに

$$Y(z)=\frac{-z}{(z-2)(z-1)}+\frac{-4z}{(z-3)(z-1)}$$
$$=\frac{-z}{z-2}+\frac{-2z}{z-3}+\frac{3z}{z-1}$$

したがって

$$a_n=2^n+4\cdot3^n-4,\ b_n=-2^n-2\cdot3^n+3$$

§9. 分数型漸化式

$$x_0=2,\ x_{n+1}=\frac{3x_n+1}{-x_n+1}$$

解説

$x_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ とおくと，

$$x_0=\frac{a_0}{b_0},\ x_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{3\cdot\dfrac{a_n}{b_n}+1}{-\dfrac{a_n}{b_n}+1}=\frac{3a_n+b_n}{-a_n+b_n}$$

であるから

$$\begin{cases}a_0=2\\ b_0=1\end{cases}\ \begin{cases}a_{n+1}=3a_n+b_n\\ b_{n+1}=-a_n+b_n\end{cases}$$

として解けばよい。

$$\begin{cases}zX(z)-2z=3X(z)+Y(z)\\ zY(z)-z=-X(z)+Y(z)\end{cases}$$

下式から $Y(z)=\dfrac{z-X(z)}{z-1}$ で，これを上式に代入して

$$(z-3)X(z)=2z+\frac{z-X(z)}{z-1}$$

よって　$X(z)=\dfrac{2z^2-z}{(z-2)^2}=\dfrac{3z}{(z-2)^2}+\dfrac{2z}{z-2}$,

$$Y(z)=\frac{z^2-5z}{(z-2)^2}=\frac{-3z}{(z-2)^2}+\frac{z}{z-2}$$

ゆえに　$a_n=(3n+4)\cdot2^{n-1}$，$b_n=(2-3n)\cdot2^{n-1}$

したがって　$x_n=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{3n+4}{2-3n}$

参考　差分方程式 (漸化式) は，音声，画像，制御システムなどのデジタル・システム解析で活躍する。

《参考文献》

〔1〕 今日から使えるラプラス変換・z 変換
　三谷正昭　講談社

(静岡県立榛原高等学校)