4次関数の接線と変曲点に関する性質について（その2）

宮原（みやはら）　敏明（としあき）

§1. はじめに

次のような接線が引ける領域などを問う問題を，前回に引き続き一般の4次関数について考えてみた。

「$f(x)=x^3-3x$ について，点$(2,\ t)$から曲線 $y=f(x)$ に3本の接線が引けるとき，tの値の範囲を求めよ。」　〔2012 岩手大〕

§2.「接線関数」の定義と性質

「接線関数」の定義

4次関数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a>0$ とする）について，$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ より，接点の座標を $(t,\ at^4+bt^3+ct^2+dx+e)$とするとき接線の方程式は，

$y=(4at^3+3bt^2+2ct+d)x-3at^4-2bt^3-ct^2+e$

である。これが点$(p,\ q)$を通るとき，

$q=(4at^3+3bt^2+2ct+d)p-3at^4-2bt^3-ct^2+e$

これをtについて整理すると，

$$3at^4-2(2ap-b)t^3-(3bp-c)t^2-2cpt-dp-e+q=0$$

である。この左辺を$g(t)$とおく。$g(t)=0$ は，$y=f(x)$ の接線の接点のx座標を解にもつ4次方程式である。

ここで，$y=g(x)$ を $y=f(x)$ の「接線関数」ということにする。

「接線関数」の性質

$$\begin{aligned}g(p)&=3ap^4-2(2ap-b)p^3-(3bp-c)p^2-2cpp-dp-e+q\\&=-ap^4-bx^3-cp^2-dp-e+q\\&=-f(p)+q\end{aligned}$$

> **性質1**：4次関数 $y=f(x)$ の接線関数を $y=g(x)$ とすると，$g(p)=q-f(p)$ が成り立つ。

また，接線関数を微分すると，

$$\begin{aligned}g'(x)&=12ax^3-6(2ap-b)x^2-2(3bp-c)x-2cp\\&=(x-p)(12ax^2+6bx+2c)\end{aligned}$$

一方，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$　であるから，

> **性質2**：$y=f(x)$ の2次導関数 $y=f''(x)$ と接線関数 $y=g(t)$ の導関数 $y=g'(x)$ の間には，$g'(x)=(x-p)f''(x)$　が成り立つ。

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c=0$ の実数解は，

$3b^2-8ac>0$ のとき，$x=\dfrac{-3b\pm\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{12a}$

$3b^2-8ac=0$ のとき，$x=-\dfrac{b}{4a}$

以後 $a>0$，$3b^2-8ac>0$ の場合を考える。このとき「その1」(数研通信74号「4次関数の接線と変曲点に関する性質について」その1）より，異なる2つの変曲点があり，異なる2つの接点をもつ接線が存在する。そうでない場合は，2次関数に近くなり，単純である。

ここで，「その1」とおき方は違うが，

$\alpha=\dfrac{-3b-\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{12a}$，$\beta=\dfrac{-3b+\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{12a}$

とすると，$g'(x)=12a(x-p)(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha<\beta$ となる。このとき，$g'(x)=0$ の実数解は $x=p$，α，βであるから，$g(p)$，$g(\alpha)$，$g(\beta)$は極値である。また，$(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$は，$y=f(x)$ の変曲点である。

p，α，βの大小関係によって極大極小が決まる。

> **性質3**：$p<\alpha<\beta$ のとき，
> $g(\alpha)$は極大値，$g(p)$，$g(\beta)$は極小値
> $\alpha<p<\beta$ のとき，

$g(p)$ は極大値，$g(\alpha)$，$g(\beta)$ は極小値
$\alpha<\beta<p$ のとき，
$g(\beta)$ は極大値，$g(\alpha)$，$g(p)$ は極小値

次に極値 $g(p)$ の符号を考える。性質 1 より

性質 4 ：
$g(p)>0 \iff q>f(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は領域 $y>f(x)$ に属している。
$g(p)=0 \iff q=f(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は曲線 $y=f(x)$ 上にある。
$g(p)<0 \iff q<f(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は領域 $y<f(x)$ に属している。

さらに，
$$\begin{aligned}g(\alpha)&=3a\alpha^4-2(2ap-b)\alpha^3\\&\quad-(3bp-c)\alpha^2-2cp\alpha-dp-e+q\\&=-(4a\alpha^3+3b\alpha^2+2c\alpha+d)p\\&\quad-(-3a\alpha^4-2b\alpha^2-c\alpha^2+e)+q\\&=-f'(\alpha)p-\{-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)\}+q\\&=q-\{f'(\alpha)p-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)\}\end{aligned}$$

変曲点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は，
$y=f'(\alpha)x-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$ である。
この式を $y=h_\alpha(x)$ とおくことにする。
よって $g(\alpha)=q-h_\alpha(p)$。同様にして $g(\beta)=q-h_\beta(p)$
ここで極値 $g(\alpha)$ の符号を考える。

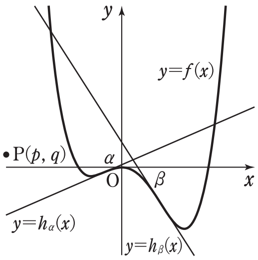
性質 5 ： $y=f(x)$ の接点関数を $y=g(x)$ とする。
$g(\alpha)>0 \iff q>h_\alpha(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は領域 $y>h_\alpha(x)$ に属している。
$g(\alpha)=0 \iff q=h_\alpha(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は直線 $y=h_\alpha(x)$ 上にある。
$g(\alpha)<0 \iff q<h_\alpha(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は領域 $y<h_\alpha(x)$ に属している。

また，変曲点 $(\beta,\ f(\beta))$ における接線の方程式
$y=f'(\beta)x-\beta f'(\beta)+f(\beta)$ を $y=h_\beta(x)$ とおくことにすると，同様な結果が得られる。

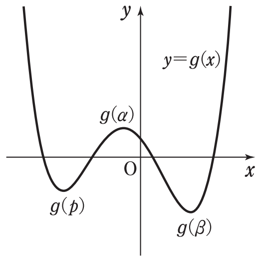
性質 6 ： $y=f(x)$ の接点関数を $y=g(x)$ とする。
$g(\beta)>0 \iff q>h_\beta(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は領域 $y>h_\beta(x)$ に属している。
$g(\beta)=0 \iff q=h_\beta(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は直線 $y=h_\beta(x)$ 上にある。
$g(\beta)<0 \iff q<h_\beta(p)$
$\iff$ 点 $(p,\ q)$ は領域 $y<h_\beta(x)$ に属している。

§3. 4 次関数の接線を引ける領域

境界線以外の領域における接線の本数



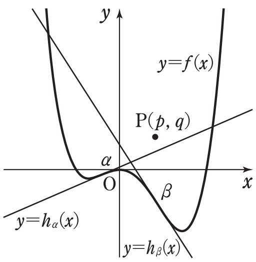
〔図 1-1〕



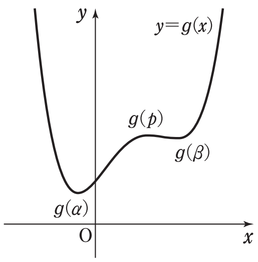
〔図 1-2〕

例えば，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が図 1-1 の位置にあるとき，
曲線 $y=f(x)$ の下であるから，$q<f(p)$ が成立。
曲線 $y=h_\alpha(x)$ の上であるから，$q>h_\alpha(p)$ が成立。
直線 $y=h_\beta(x)$ の下であるから，$q<h_\beta(p)$ が成立。
性質 4 ～ 6 より，それぞれ $g(p)<0$，$g(\alpha)>0$，$g(\beta)<0$ である。性質 3 より $p<\alpha<\beta$ のとき，
$g(\alpha)$ は極大値，$g(p)$，$g(\beta)$ は極小値である。
よって，極大値 $g(\alpha)>0$，極小値 $g(p)<0$，極小値 $g(\beta)<0$ である。

図 1-2 より接線関数 $g(x)=0$ は実数解を 4 個もつ。したがって，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から引ける接線は 4 本である。



〔図 2-1〕



〔図 2-2〕

また，点 P$(p,\ q)$ が図 2-1 の位置にあるとき，同様に考えると，次の不等式を満たす。

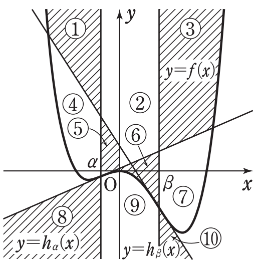
$q>f(p)$，$q>h_\alpha(p)$，$q>h_\beta(p)$

性質 4 ～ 6 より，それぞれ $g(p)>0$，$g(\alpha)>0$，$g(\beta)>0$ である。性質 3 より $\alpha<p<\beta$ のとき，$g(p)$ は極大値，$g(\alpha)$，$g(\beta)$ は極小値である。よって，極大値 $g(p)>0$，極小値 $g(\alpha)>0$，極小値 $g(\beta)>0$ である。

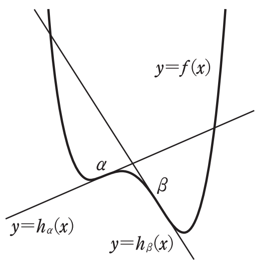
図 2-2 より，接線関数 $g(x)=0$ の実数解は 0 個であるから，点 P$(p,\ q)$ からは接線が引けない。

このように考えると，接線の本数は，接線関数の 3 つの極値の正負と α，p，β の大小関係で決まることがわかる。まず，3 つの極値の正負は，$2^3=8$ 通りあるが，その中で，(極小値)<(極大値) を満たさない場合が 3 通りあるので，5 通りとなる。α，p，β の大小は，$\alpha<\beta$ より 3 通りであるから，全部で $5\times3=15$ 通りとなる。しかし，α，p，β の大小から，図 3-1 のように 4 次関数・2 接線のグラフを境界線とする以外に，2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ を考える必要が出てくる。図 3-1 の領域 ①$p<\alpha<\beta$，②$\alpha<p<\beta$，③$\alpha<\beta<p$ では，すべて $q>f(p)$，$q>h_\alpha(p)$，$q>h_\beta(p)$ となる。図 2-2 より，接線の本数は 0 本となる。同様に考えると，領域⑧⑨⑩は接線の本数が 2 本となる。さらに④と⑤も 2 本，⑥と⑦も 2 本となる。よって，これらの領域では α，p，β の大小は考えなくてもよいことになる。

したがって図 3-2 のような 4 次関数・2 接線のグラフを境界線とする 9 つの領域ごとに本数が決まる。

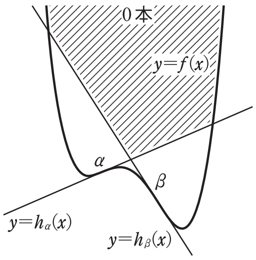


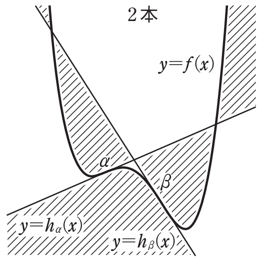
〔図 3-1〕

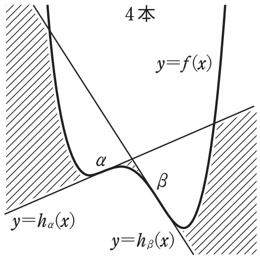


〔図 3-2〕

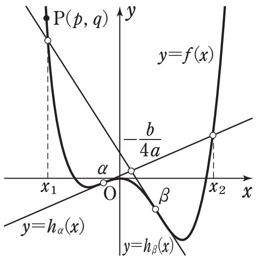
以上を本数ごとにまとめると，以下のようになる。



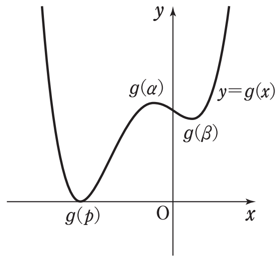




交点以外の境界線における接線の本数



〔図 4-1〕



〔図 4-2〕

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=h_\beta(x)$ の交点の x 座標を x_1

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=h_\alpha(x)$ の交点の x 座標を x_2

とする。

また，2 本の接線 $y=h_\alpha(x)$ と $y=h_\beta(x)$ の交点の x 座標は，「その 1 」定理 2 より，$x=-\dfrac{b}{4a}$ である。

点 P$(p,\ q)$ が図 4-1 の位置にあるとき，すなわち，曲線 $y=f(x)$ の $p<x_1$ の部分にあるとき，

曲線 $y=f(x)$ 上にあるから，$q=f(p)$ が成立。

直線 $y=h_\alpha(x)$ の上側であるから，$q>h_\alpha(p)$ が成立。

直線 $y=h_\beta(x)$ の上側であるから，$q>h_\beta(p)$ が成立。

性質 4 ～ 6 より，それぞれ $g(p)=0$，$g(\alpha)>0$，$g(\beta)>0$ である。

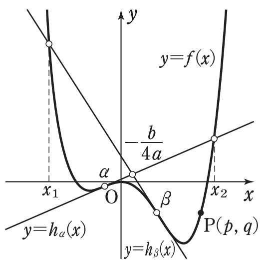
性質 3 より $p<\alpha<\beta$ のとき，$g(\alpha)$ は極大値，$g(p)$，$g(\beta)$ は極小値である。よって，極大値 $g(\alpha)>0$，極小値 $g(p)=0$，極小値 $g(\beta)>0$ である。

図 4-2 より接線関数 $g(x)=0$ は実数解を 1 個もつ。したがって，点 P$(p,\ q)$ から引ける接線は 1

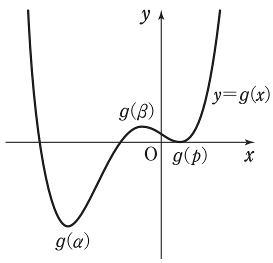
本である。

同様に考えて，直線 $y=h_\beta(x)$ の $x_1<p<-\dfrac{b}{4a}$ の部分，直線 $y=h_\alpha(x)$ の $-\dfrac{b}{4a}<p<x_2$ の部分，曲線 $y=f(x)$ の $x_2<p$ の部分に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ があるとき，引ける接線は１本である。

次に，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が図 5-1 の位置にあるとき，すなわち，曲線 $y=f(x)$ の $\beta<p<x_2$ の部分にあるとき，



〔図 5-1〕



〔図 5-2〕

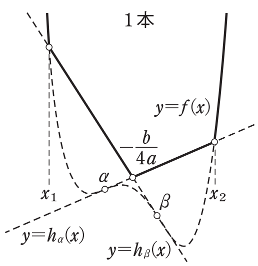
曲線 $y=f(x)$ 上にあるから，$q=f(p)$ が成立。直線 $y=h_\alpha(x)$ の下側であるから，$q<h_\alpha(p)$ が成立。

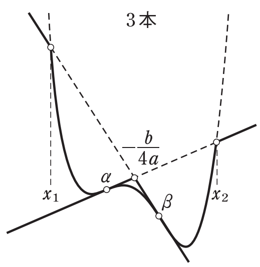
直線 $y=h_\beta(x)$ の上側であるから，$q>h_\beta(p)$ が成立。

性質４～６より，それぞれ $g(p)=0$，$g(\alpha)<0$，$g(\beta)>0$ である。性質３より $\alpha<\beta<p$ のとき，$g(\beta)$ は極大値，$g(\alpha)$，$g(p)$ は極小値である。よって，極大値 $g(\beta)>0$，極小値 $g(p)=0$，極小値 $g(\alpha)<0$ である。

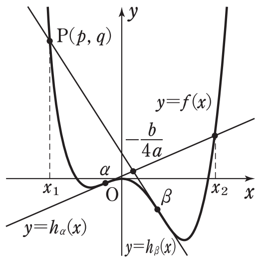
図 5-2 より接線関数 $g(x)=0$ は実数解を３個もつ。したがって，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から引ける接線は３本である。

以上を本数ごとにまとめると，以下のようになる。ただし，交点は含まない。

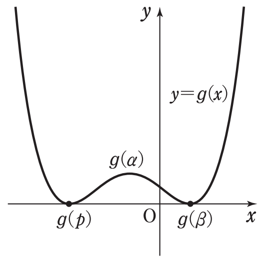




交点における接線の本数



〔図 6-1〕



〔図 6-2〕

例えば，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が図 6-1 の位置にあるとき，すなわち，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=h_\beta(x)$ の交点であるとき，曲線 $y=f(x)$ 上にあるから，

$q=f(p)$ が成立。直線 $y=h_\alpha(x)$ の上側であるから，$q>h_\alpha(p)$ が成立。直線 $y=h_\beta(x)$ 上にあるから，$q=h_\beta(p)$ が成立。性質４～６より，それぞれ $g(q)=0$，$g(\alpha)>0$，$g(\beta)=0$ である。

性質３より $p<\alpha<\beta$ のとき，$g(\alpha)$ は極大値，$g(\beta)$，$g(p)$ は極小値である。よって，極大値 $g(\alpha)>0$，極小値 $g(p)=0$，極小値 $g(\beta)=0$ である。

図 5-2 より接線関数 $g(x)=0$ は実数解を２個もつ。したがって，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から引ける接線は２本である。

他の点も同様に考えると，５つの交点について，すべて引ける接線は２本である。

§4. 異なる２点で接する接線上の点

平面上のすべての点で，引ける本数を調べたが，異なる２点で接する接線上の点では，周囲より１本少なくなる。これは２次方程式で，２つの解が等しくなる場合のように，２本の接線が一致すると考えることができる。

「その１」定理１より４次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$ について，$3b^2-8ac>0$ が成り立つならば，異なる２点で接する接線の方程式は，

$$y=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x-\frac{(b^2-4ac)^2}{64a^3}+e \quad \text{である。}$$

この接線上に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ があるとすると，

$$q=\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}p-\frac{(b^2-4ac)^2}{64a^3}+e$$

接線関数 $g(t)=3at^4-2(2ap-b)t^3-(3bp-c)t^2$
$\qquad\qquad -2cpt-dp-e+q$

に代入すると，

$g(t)=3at^4-2(2ap-b)t^3-(3bp-c)t^2-2cpt-dp$

$$-e+\left\{\frac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}p-\frac{(b^2-4ac)^2}{64a^3}+e$$

$$=\frac{1}{64a^3}\{192a^4t^4-128a^3(2ap-b)t^3$$

$$-64a^3(3bp-c)t^2-128a^3cpt+8ab^3p$$

$$-32a^2bcp-b^4+8ab^2c-16a^2c^2\}$$

接線関数の性質より，4 次方程式 $g(t)=0$ は 2 つの接点の x 座標を解に持つ。したがって「その 1 」§ 2 より，$8a^2t^2+4abt-b^2+4ac$ を因数に持つはずである。実際割り算をして確かめると，

$$g(t)=\frac{1}{64a^3}\{24a^2t^2-4a(8ap-b)t-8apb+b^2$$

$$-4ac\}(8at^2+4abt-b^2+4ac)$$

となる。

次に残りの因数について判別式 D を考える。

$$\frac{D}{16}=a^2(8ap-b)^2-6a^2(-8abp+b^2-4ac)$$

$$=a^2(64ap^2+32abp+ac-5b^2)$$

$\dfrac{D}{16}=0$ とすると，$p=\dfrac{-2b\pm\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}$

これは変曲点を通る接線と 2 接点をもつ接線の交点の x 座標になっている。実際「その 1 」§ 3 と定理 1 より，

$$y=\left\{\frac{9b(b^2-4ac)-\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{72a^2}+d\right\}x$$

$$+\frac{24a^2c^2+9b^2(b^2-4ac)-b\sqrt{3(3b^2-8ac)^3}}{288a^3}+e$$

$y=\left\{\dfrac{b(b^2-4ac)}{8a^2}+d\right\}x-\dfrac{(b^2-4ac)^2}{64a^3}+e$ から

y を消去すると，

$$\frac{(3b^2-8ac)\sqrt{3(3b^2-8ac)}}{72a^2}x$$

$$=\frac{48a^2c^2+18b^2(b^2-4ac)-2b(3b^2-8ac)\sqrt{3(2b^2-8ac)}+9(b^2-4ac)^2}{576a^3}$$

$$8a(3b^2-8ac)\sqrt{3(3b^2-8ac)}\,x$$

$$=3(3b^2-8ac)^2-2b(3b^2-8ac)\sqrt{3(3b^2-8ac)}$$

$$8a\sqrt{3(3b^2-8ac)}\,x=3(3b^2-8ac)-2b\sqrt{3(3b^2-8ac)}$$

よって，$x=\dfrac{-2b+\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}$

もう一本の接線との交点の x 座標も同様にして，

$x=\dfrac{-2b-\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}$

さらに $\dfrac{D}{16}=0$ の判別式 D' は，

$\dfrac{D'}{4a^2}=192a^2(3b^2-8ac)>0$ であるから，

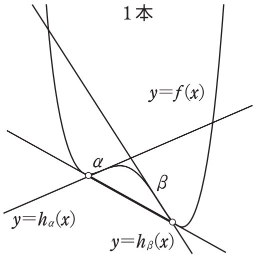
$\dfrac{D}{16}>0$ のとき，つまり $x<\dfrac{-2b-\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}$，$\dfrac{-2b+\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}<x$ のとき，実数解は 2 個であるから接線は 2 本である。これに異なる 2 点で接する接線 1 本をあわせて 3 本となる。

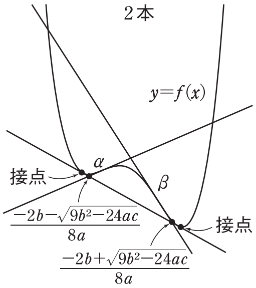
$\dfrac{D}{16}=0$ のとき，つまり $x=\dfrac{-2b\pm\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}$ のとき，実数解は 1 個であるから接線は 1 本である。これに異なる 2 点で接する接線 1 本をあわせて 2 本となる。すなわち，2 つの交点上ではそれぞれ 2 本である。また，2 つの接点上でもそれぞれ 2 本である。

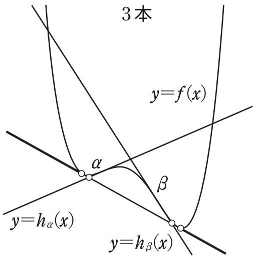
$\dfrac{D}{16}<0$ のとき，つまり

$\dfrac{-2b-\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}<x<\dfrac{-2b+\sqrt{9b^2-24ac}}{8a}$ のとき，実数解は 0 個であるから接線は 0 本である。これに異なる 2 点で接する接線 1 本をあわせて 1 本となる。

以上をまとめると，以下のようになる。







太線の部分と黒丸

興味の赴くままに，面白いと思える事を考えていたら，いつの間にか，歩いたことのない小道に分け入ったという感じである。初等的であるが，あまり単純ではなかった分，調べる楽しみはあった。何かの役に立たなくとも面白いと思っていただけると幸いです。

《参考文献》

〔1〕 佐賀県高等学校教育研究会数学部会研究集録 H 24「一般化その 5 」（宮原敏明）

（佐賀県立鳥栖高等学校）