経路の確率

山田　潤（やまだ　じゅん）

§0. はじめに

「場合の数」や「確率」を学習するときには，場合の数を漏らすことなく，また重複することなく如何に効率よく数え上げるかが大切なポイントとなる。このことは経路を通る確率や電流の流れる確率の問題を考える場合にもあてはまる。

そこで，経路（電気配線等）が「直列」に繋がっている場合と「並列」に繋がっている場合の直列・並列の経路の確率を利用した問題の解法を考察した。

§1. 直列・並列の経路の確率

区間 A_iA_{i+1} の電流の流れる確率を p_i ($p_i+q_i=1$, $i=1, 2, 3, \cdots, n$) とすると，区間 A_1A_2 ($n=1$) のとき電流が流れる確率は，$P=p_1=1-q_1$，電流が流れない確率は，$\overline{P}=1-p_1=q_1$ である。

区間 A_1A_2 と A_2A_3 が直列，すなわち区間 A_1A_3 ($n=2$) のとき電流が流れる確率は，

$$P=p_1p_2=(1-q_1)(1-q_2)$$

電流が流れない確率は，

$$\overline{P}=p_2(1-p_1)+(1-p_2)=1-p_1p_2$$

となる。区間 A_1A_2 と A_2A_3 と A_3A_4 が直列，すなわち区間 A_1A_4 ($n=3$) のとき電流が流れる確率は，$P=p_1p_2p_3$，電流が流れない確率は，

$$\overline{P}=p_3(1-p_1p_2)+(1-p_3)=1-p_1p_2p_3$$

となる。

並列の場合にその区間に電流が流れる確率は，区間 A_1A_2 ($n=1$) の電流が流れる確率を $P=1-q_1=1-(1-p_1)=p_1$，電流が流れない確率を $\overline{P}=q_1=1-p_1$ と考えると，区間 A_1A_2 と A_2A_3 とが並列 ($n=2$) のときは，電流が流れる確率は，

$$P=p_2\cdot 1+(1-p_2)\cdot p_1=p_1+p_2-p_1p_2$$
$$=1-(1-p_1)(1-p_2)=1-q_1q_2,$$

電流が流れない確率は，

$$\overline{P}=q_1q_2=(1-p_1)(1-p_2)=1-(p_1+p_2-p_1p_2)$$

となる。同様に，区間 A_1A_2 と A_2A_3 と A_3A_4 とが並列 ($n=3$) のときは，電流が流れる確率は，

$$P=p_3\cdot 1+(1-p_3)\cdot(p_1+p_2-p_1p_2)$$
$$=(p_1+p_2+p_3)-(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+p_1p_2p_3$$
$$=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=1-q_1q_2q_3,$$

電流が流れない確率は，

$$\overline{P}=q_1q_2q_3=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$$
$$=1-\{(p_1+p_2+p_3)-(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)+p_1p_2p_3\}$$

となる。

一般の自然数 n について，n 個の区間が直列に繋がった区間 A_1A_{n+1} で電流が流れる確率は，$P=p_1p_2p_3\cdots p_n$，n 個の区間 A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_{n+1} が並列の場合に電流が流れる確率は，

$$P=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots(1-p_n)$$
$$=1-q_1q_2q_3\cdots q_n$$

と表せることが数学的帰納法によって示せる。電流が流れない場合の確率は，それぞれ電流が流れる場合の余事象であるから，

直列の場合は $\overline{P}=1-p_1p_2p_3\cdots p_n$，

並列の場合は $\overline{P}=q_1q_2q_3\cdots q_n$

と表せる。

> 区間 A_iA_{i+1} で電流の流れる確率を p_i，電流の流れない確率を q_i ($p_i+q_i=1$, $i=1, 2, 3, \cdots n$) とする。
>
> n 個の区間が直列または並列に繋がった区間で電流の流れる確率を $P(n)$，電流が流れない確率を $\overline{P(n)}$ とすると，n 個が直列に繋がった区間 A_1A_{n+1} に電流の流れる確率は，
>
> $$P(n)=p_1p_2p_3\cdots p_n$$
>
> 電流の流れない確率は，
>
> $$\overline{P(n)}=1-P(n)=1-p_1p_2p_3\cdots p_n$$
>
> となる。
>
> n 個の A_1A_2，A_2A_3，…，A_nA_{n+1} が並列の場合に電流の流れる確率は，

$$P(n)=1-\overline{P(n)}=1-q_1q_2q_3\cdots q_n,$$
電流が流れない確率は,
$$\overline{P(n)}=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots(1-p_n)$$
$$=q_1q_2q_3\cdots q_n$$
となる。

§2. 問題演習

(並列型)

【例題1】

A, B, Cの3人が同じ標的を射撃するのに, 命中率はそれぞれ0.6, 0.7, 0.8であるという。この3人が1発ずつ発射するとき, 少なくとも1人が命中する確率を求めよ。

【解答例】 電流の流れる確率を, 命中率に置き換え, 並列 $n=3$ の場合と考えればよい。

A, B, Cの命中しない確率はそれぞれ
$$1-0.6=0.4,\ 1-0.7=0.3,\ 1-0.8=0.2$$
より少なくとも1人が命中する確率は,
$$1-0.4\times0.3\times0.2=1-0.024=0.976$$ となる。

■

S46 山形大学 理工学部4番[1]

(直列・並列混在型・場合分けなし)

【例題2】

図のような4個のスイッチを含む回路がある。各瞬間に各スイッチが開いている確率は次の通りとする。

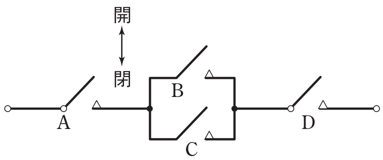
スイッチ	A	B	C	D
確率	0.5	0.4	0.7	0.6

ただし, 各スイッチの開閉は互いに独立であるとする。このとき, ある瞬間次の各事象が起こり, 回路に電流が流れない確率をそれぞれ求めよ。

(1) AかDが開いている。

(2) BかCが開いている。

(3) どれかのスイッチが開いている。



【解答例】

(1) スイッチAまたはDが開いているときは, 直列 $n=2$ の場合である。AとDのスイッチが開いて回路に電流が流れない確率はそれぞれ0.5と0.6であるから, 電流が流れる確率はそれぞれ
$$1-0.5=0.5 \text{ と } 1-0.6=0.4$$
より求める確率は $1-0.5\times0.4=0.8$ となる。

(2) スイッチBとCが開いているときは, 並列 $n=2$ の場合である。BとDのスイッチが開いて回路に電流が流れない確率はそれぞれ0.4と0.7であるから, 電流が流れない確率は,
$$0.4\times0.7=0.28$$ となる。

(3) どれかのスイッチが開いていて電流が流れないのは, (スイッチA, 並列スイッチBC, スイッチD)の直列 $n=3$ の場合である。並列BCの部分で電流が流れる確率は, (2)の結果より
$$1-0.28=0.72$$
であるからこの回路に電流が流れない確率は,
$$1-0.5\times0.72\times0.4=1-0.144=0.856$$ となる。

■

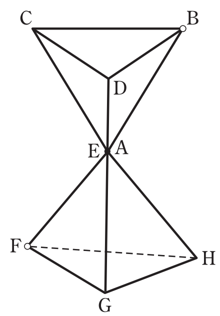
H11 東京大学 前期日程 理科3番 [2]

(直列・並列混在型・場合分けあり)

【例題3】

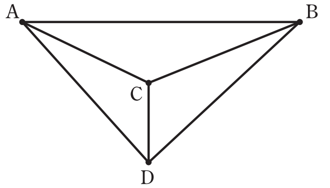
(1) p を $0<p<1$ を満たす実数とする。四面体ABCDの各辺はそれぞれ確率 p で電流を流すものとする。このとき, 頂点AからBに電流が流れる確率を求めよ。ただし, 各辺が電流を通すか通さないかは独立で, 辺以外は電流を通さないものとする。

(2) (1)で考えたような2つの四面体ABCDとEFGHを図のように頂点AとEでつないだとき, 頂点BからFに電流が流れる確率を求めよ。



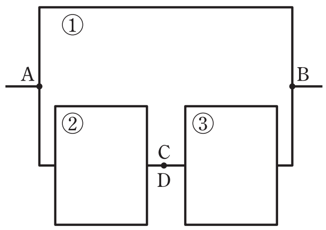
【解答例】

(1) 正四面体を平面上に展開すると



となるので，辺 CD 間を電流が流れる場合と流れない場合に分けて考えれば，直列・並列の経路の確率の問題と考えることができる。

i）辺 CD 間を電流が流れる場合の展開図は



である。

A → B 間……① の電流が流れる確率は p

A→C(＝D)間……② とC(＝D)→B間……③ の電流が流れる確率は，それぞれ並列 $n=2$ の場合であるから $1-q^2=1-(1-p)^2$ となる。

よって，A → C (＝D) → B 間の電流の流れる確率は，直列 $n=2$ の場合であるから

$(1-q^2)^2=\{1-(1-p)^2\}^2$　となる。

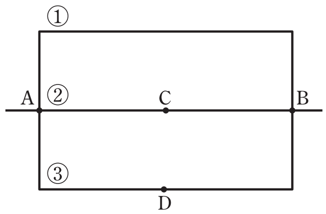
A → B 間と A → C (＝D) → B 間とは並列 $n=2$ の場合であるから，求める確率は，

$1-(1-p)[1-\{1-(1-p)^2\}^2]$

$=1-(1-p)\{1-(2p-p^2)^2\}$

$=p+4p^2-8p^3+5p^4-p^5$　となる。

ii）辺 CD 間を電流が流れない場合の展開図は



である。

A → B ……① の電流の流れる確率は p

A → C → B …… ② と A → D → B …… ③ への電流の流れる確率は直列 $n=2$ の場合より $p^2=(1-q)^2$ であり，この①②③は並列 $n=3$ であるから A から B へ電流の流れる確率は，

$=1-q\{1-(1-q)^2\}^2=1-(1-p)(1-p^2)^2$

$=p+2p^2-2p^3-p^4+p^5$　となる。

i）と ii）は排反な事象であるから求める確率は，

$p\times(p+4p^2-8p^3+5p^4-p^5)$

$+q\times(p+2p^2-2p^3-p^4+p^5)$

$=p+2p^2-7p^4+7p^5-2p^6$

となる。

(2) B → A → F 間は直列 $n=2$ の場合とみることができるので，

B → A 間と A → F 間の電流の流れる確率はそれぞれ(1)の結果より，

$p+2p^2-7p^4+7p^5-2p^6$

$=p(1+2p-7p^3+7p^4-2p^5)$

であるから，求める確率は，

$\{p(1+2p-7p^3+7p^4-2p^5)\}^2$

$=p^2(1+2p-7p^3+7p^4-2p^5)^2$　となる。　■

H23　東京大学　後期　総合科目Ⅱ　第 2 問 B [3]

(直列・並列混在型・場合分けあり)

【例題 4 】

発電所から，いくつかの町に電気を送る送電網について考える。各地区を結ぶ送電線は，場合によって何らかの理由により切断され，電気を送れなくなることもある。

(1) 図 2 のように，地点 O に発電所があり，A，B に町がある。送電網は数学的に単純化して考えて図 2 のように 6 本の送電線からなるとする。(図の 1 本の線分が 1 本の送電線を表す。) 各送電線は，それぞれ独立に電気を通す確率が p，切断され電気を通さない確率が q であるとする。ただし，$p>0$，$q>0$ で $p+q=1$ である。このとき，発電所 O から送電して町 A に電気が通じる確率を α，町 A と町 B の両方に電気が通じる確率を β とおく。α を p，q を用いて表せ。(β を求める必要はない。)

(2) 今度は，図 2 の送電網を 3 つ組み合わせて得られる図 3 のような送電網を考える。このとき，発電所 O から送電して町 C に電気が通じる確率を，(1)で定義した α，β を用いて表せ。

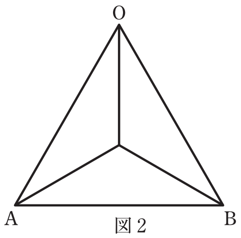


図 2

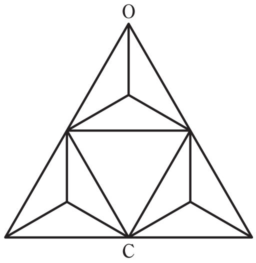


図 3

【解答例】

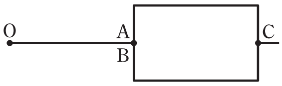
⑴　図 2 は，【例題 3】の四面体の展開図と同じであるから，町 A に電気が通じる確率は，

$$\alpha = p + 2p^2 - 7p^4 + 7p^5 - 2p^6$$
$$= p(1 + 2p - 7p^3 + 7p^4 - 2p^5)$$　となる。

⑵　題意より町Aだけに電気が通じる確率は $\alpha - \beta$, 対称性より町Bだけに電気が通じる確率も $\alpha - \beta$ である。⑵は⑴の同じ三角形 3 つからなる図形である。

（i）　AB の両方の町に電気が通じるとき

このときの確率は題意より β であるから，



O → A＝B 間の電気の通じる確率はβ,

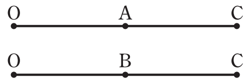
A＝B → C 間の電気の通じる確率は並列 $n=2$ の場合であるから　$1-(1-\alpha)^2$,

O → A＝B → C 間は直列 $n=2$ の場合となるから，電気の通じる確率は

$$\beta \times \{1-(1-\alpha)^2\} = \alpha\beta(2-\alpha)$$　となる。

（ii）　町Aだけまたは町Bだけに電気が通じるとき

このときの確率は，それぞれ $\alpha - \beta$ であるから，



O → A → C 間とO → B → C 間の経路で電気が通じる確率は直列 $n=2$ の場合となる。

電気が通じる確率はそれぞれ $(\alpha-\beta)\cdot\alpha$ となる。

（i）と（ii）とは排反であるから求める確率は，

$\alpha\beta(2-\alpha) + 2\alpha(\alpha-\beta) = \alpha^2(2-\beta)$ となる。　■

この問題は【例題 3】H11 年度前期試験問題の拡張版とも受け取れる。H23 年度東京大学後期入試の直前の 3 月 11 日に発生した東日本大震災は，大きな被害をもたらした。福島第一原子力発電所も震災に見舞われ，東北・関東地方の電力の供給にも大きな影響が出た。この問題の出題はすでに決まっていたと思うが，受験生諸君はこの出題を見てどのように思っただろうか。

§3.　まとめ

経路（電気配線等）が「直列」に繋がっている場合と「並列」に繋がっている場合の直列・並列の経路の確率を利用すると，問題の見通しがよくなり効率よく確率を計算できる場合がある。生徒にも理解しやすく，有効な計算方法の 1 つと考える。

《参考文献》

〔1〕　聖文社　昭和 46 年度全国大学数学入試問題詳解集　p.159

〔2〕　聖文社　平成 11 年度全国大学数学入試問題詳解 I 集　p.99

〔3〕　河合塾 2011 年度東京大学入試問題 http://kaisoku.kawai-juku.ac.jp/nyushi/honshi/11/t02.html

（愛知県立津島高等学校）