同一の図を用いた加法定理と積和公式の証明

高木　和久（たかぎ　かずひさ）

§0. はじめに

三角関数の積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\quad\cdots①$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}\quad\cdots②$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\quad\cdots③$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}\quad\cdots④$$

は，通常は加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\quad\cdots⑤$$

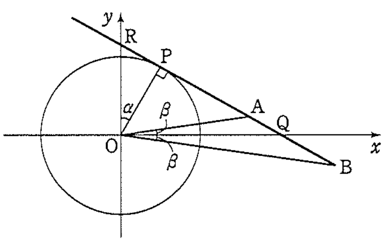
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\quad\cdots⑥$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\quad\cdots⑦$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\quad\cdots⑧$$

を用いて証明されるが，これらの8つの等式は，実は同一の図を用いて証明することができる。

以下に $0<\beta<\alpha,\ \alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ の場合の証明を与える。単位円上に点Pをとり，点Pにおける円の接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれQ，Rとする。この接線上に2点A，Bを $\angle\mathrm{AOQ}=\angle\mathrm{QOB}=\beta$ となるようにとる。



§1. ⑤，⑥の証明

§1～§3では $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ とする。このとき点Pの座標は $(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ となるから接線の方程式は

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$$

である。

$\angle\mathrm{PAO}=\alpha+\beta$ であるから

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AO}}=\frac{1}{\mathrm{AO}}$$

$\angle\mathrm{PBO}=\angle\mathrm{PQO}-\beta=\alpha-\beta$ であるから

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BO}}=\frac{1}{\mathrm{BO}}$$

点Aの座標は $(\mathrm{AO}\cos\beta,\ \mathrm{AO}\sin\beta)$ であるから $x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$ に代入して

$$\mathrm{AO}\cos\beta\sin\alpha+\mathrm{AO}\sin\beta\cos\alpha=1$$

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{\mathrm{AO}}$$

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

点Bの座標は $(\mathrm{BO}\cos\beta,\ -\mathrm{BO}\sin\beta)$ であるから $x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$ に代入して

$$\mathrm{BO}\cos\beta\sin\alpha-\mathrm{BO}\sin\beta\cos\alpha=1$$

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{\mathrm{BO}}$$

$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

§2. ①の証明

OQは $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線であるから $\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=\mathrm{AO}:\mathrm{BO}$ である。つまりQは線分ABを $\mathrm{AO}:\mathrm{BO}$ の比に内分している。Qの x 座標は $\frac{1}{\sin\alpha}$ であるから

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{BO}\cdot\mathrm{AO}\cos\beta+\mathrm{AO}\cdot\mathrm{BO}\cos\beta}{\mathrm{AO}+\mathrm{BO}}$$

$$=\frac{2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{BO}\cos\beta}{\mathrm{AO}+\mathrm{BO}}$$

両辺を $\cos\beta$ で割ると

$$\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{BO}}{\mathrm{AO}+\mathrm{BO}}$$

逆数をとって

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AO}+\mathrm{BO}}{\mathrm{AO}\cdot\mathrm{BO}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{AO}}+\frac{1}{\mathrm{BO}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

§3. ②の証明

三角形 ARO と三角形 BRO の面積の比は AR：RB に等しいが，この比は RO を底辺としたときの高さの比

$$AO\cos\beta : BO\cos\beta = AO : BO$$

に等しい。つまり R は線分 AB を AO：BO の比に外分している。

R の y 座標は $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ であるから

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{BO\cdot AO\sin\beta-AO\cdot(-BO\sin\beta)}{-AO+BO}$$

$$=\frac{2AO\cdot BO\sin\beta}{BO-AO}$$

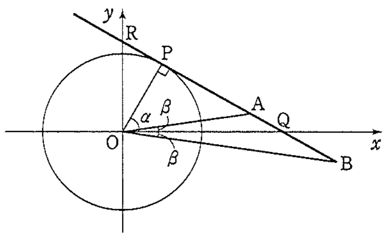
両辺を $\sin\beta$ で割ると

$$\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{2AO\cdot BO}{BO-AO}$$

$$\therefore\quad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{BO-AO}{AO\cdot BO}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AO}-\frac{1}{BO}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

§4. ⑦，⑧の証明



§4～§6 では $\angle POQ=\alpha$ とする。このとき点 P の座標は $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ となるから接線の方程式は

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$$

である。

$\angle PAO=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)$ であるから

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OP}{AO}=\frac{1}{AO}$$

$\angle PBO=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OP}{BO}=\frac{1}{BO}$$

点 A の座標は $(AO\cos\beta,\ AO\sin\beta)$ であるから $x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$ に代入して

$$AO\cos\beta\cos\alpha+AO\sin\beta\sin\alpha=1$$

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{AO}$$

$$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

点 B の座標は $(BO\cos\beta,\ -BO\sin\beta)$ であるから $x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$ に代入して

$$BO\cos\beta\cos\alpha-BO\sin\beta\sin\alpha=1$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{BO}$$

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

§5. ③の証明

OQ は $\angle AOB$ の二等分線であるから AQ：QB＝AO：BO である。よって Q は線分 AB を AO：BO の比に内分する。Q の x 座標は $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ であるから

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{BO\cdot AO\cos\beta+AO\cdot BO\cos\beta}{AO+BO}$$

$$=\frac{2AO\cdot BO\cos\beta}{AO+BO}$$

両辺を $\cos\beta$ で割ると

$$\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{2AO\cdot BO}{AO+BO}$$

$$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\frac{AO+BO}{AO\cdot BO}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{AO}+\frac{1}{BO}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

§6. ④の証明

三角形 ARO と三角形 BRO の面積の比は AR：RB に等しいが，この比は RO を底辺としたときの高さの比

$$AO\cos\beta : BO\cos\beta = AO : BO$$

に等しい。つまり R は線分 AB を AO：BO の比に外分している。

R の y 座標は $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ であるから

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{BO\cdot AO\sin\beta-AO\cdot(-BO\sin\beta)}{-AO+BO}$$

$$=\frac{2AO\cdot BO\sin\beta}{BO-AO}$$

両辺を $\sin\beta$ で割ると

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{2AO\cdot BO}{BO-AO}=-2\frac{AO\cdot BO}{AO-BO}$$

$$\therefore\quad \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\cdot\frac{AO-BO}{AO\cdot BO}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BO}-\frac{1}{AO}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

（高知県　高知工業高等専門学校）