2010年センター試験確率の問題の一般化

戸田(とだ)　一成(かずなり)

§1. はじめに

2010年のセンター試験の問題を一般化し，それを解いたので紹介する。

§2. 問題

袋の中に赤玉 n 個，白玉 n 個，黒玉 1 個の合計 $2n+1$ 個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ 1 から n までの数字が一つずつ書かれており，黒玉には何も書かれていない。この袋から同時に n 個の玉を取り出す。

取り出した n 個の中に同じ数字の赤玉と白玉が 1 組もなければ得点は 0 点，1 組だけあれば得点 1 点，2 組あれば得点は 2 点，…，k 組あれば得点は k 点とする。このとき，得点の期待値は $\dfrac{{}_nC_2}{2n+1}$ である。

§3. 証明

n 個の玉の取り出し方は ${}_{2n+1}C_n$ 通りある。

得点が 0 点である場合

黒玉の含まれているのは，取り出した n 個から黒玉 1 個を除いた残りの $n-1$ 個について，数字の決め方が ${}_nC_{n-1}$ 通り，色の決め方が 2^{n-1} 通りであるから，${}_nC_{n-1}\times 2^{n-1}$ 通りである。

黒玉の含まれていないのは，取り出された n 個について，数字の決め方は ${}_nC_n$ 通り，色の決め方が 2^n 通りであるから，${}_nC_n\times 2^n$ 通りである。

得点が 1 点である場合

黒玉の含まれているのは，2 個 1 組の数字の決め方が ${}_nC_1$ 通り，残り $n-3$ 個は数字の決め方 ${}_{n-1}C_{n-3}$ 通り，色の決め方が 2^{n-3} 通りであるから，${}_nC_1\times{}_{n-1}C_{n-3}\times 2^{n-3}$ 通りである。

黒玉の含まれていないのは，2 個 1 組の数字の決め方が ${}_nC_1$ 通り，残り $n-2$ 個は数字の決め方 ${}_{n-1}C_{n-2}$ 通り，色の決め方が 2^{n-2} 通りであるから，${}_nC_1\times{}_{n-1}C_{n-2}\times 2^{n-2}$ 通りである。

得点が 2 点である場合

黒玉の含まれているのは，2 個 2 組について，数字の決め方は ${}_nC_2$ 通り，残り $n-5$ 個は数字の決め方 ${}_{n-2}C_{n-5}$ 通り，色の決め方が 2^{n-5} 通りであるから，${}_nC_2\times{}_{n-2}C_{n-5}\times 2^{n-5}$ 通りである。

黒玉の含まれていないのは，2 個 2 組について，数字の決め方は ${}_nC_2$ 通り，残り $n-4$ 個は数字の決め方 ${}_{n-2}C_{n-4}$ 通り，色の決め方が 2^{n-4} 通りであるから，${}_nC_2\times{}_{n-2}C_{n-4}\times 2^{n-4}$ 通りである。

得点が k 点である場合

まず，k は整数で，k の範囲は，$0\leqq k\leqq\left[\dfrac{n}{2}\right]$

黒玉の含まれているのは，2 個 k 組について，数字の決め方は ${}_nC_k$ 通り，残り $n-1-k$ 個は数字の決め方 ${}_{n-1-k}C_{n-1-2k}$ 通り，色の決め方が 2^{n-1-2k} 通りであるから，${}_nC_k\times{}_{n-1-k}C_{n-1-2k}\times 2^{n-1-2k}$ 通りである。

黒玉の含まれていないのは，2 個 k 組について，数字の決め方は ${}_nC_k$ 通り，残り $n-2k$ 個は数字の決め方 ${}_{n-k}C_{n-2k}$ 通り，色の決め方が 2^{n-2k} 通りであるから，${}_nC_k\times{}_{n-k}C_{n-2k}\times 2^{n-2k}$ 通りである。

求める期待値は

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k\cdot\frac{{}_nC_k\cdot{}_{n-1-k}C_{n-1-2k}\cdot 2^{n-1-2k}+{}_nC_k\cdot{}_{n-k}C_{n-2k}\cdot 2^{n-2k}}{{}_{2n+1}C_n}$$

$$=\frac{{}_nC_1\cdot{}_{2n-2}C_{n-3}+{}_nC_1\cdot{}_{2n-2}C_{n-2}}{{}_{2n+1}C_n}$$

（等号の成立は後ほど）

$$=\frac{n(2n-2)!}{n!(n-3)!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-2}\right)\frac{(n+1)!\,n!}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{n(2n-2)!(2n-1)(n+1)!}{(n-3)!(n+1)(n-2)(2n+1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2(2n+1)}=\frac{{}_nC_2}{2n+1}$$

黒玉を含まない場合を示せば十分でしょう。
k を消すのにかなり苦労しました。

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} k{}_nC_k \cdot {}_{n-k}C_{n-2k} \cdot 2^{n-2k} = {}_nC_1 \cdot {}_{2n-2}C_{n-2}$$

$0 \leqq k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ である整数 k について,

k 点の場合の数字の決め方は ${}_nC_k$ 通り,
得点にならない数字の決め方は ${}_{n-k}C_{n-2k}$ 通り,
色の決め方は 2^{n-2k} 通り

だから, k 点の場合の数は,

${}_nC_k \cdot {}_{n-k}C_{n-2k} \cdot 2^{n-2k}$ 通り

であり, これを k 回ずつ, $0 \leqq k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ に渡って足したのが左辺である。

右辺は1点を与える組 (1, 1), (2, 2), ……, (n, n) の ${}_nC_1$ 通りの各場合について, それを含む n 個の玉の取り出し方は ${}_{2n}C_{n-2}$ 通りである。その積は, k 点のものを k 回ずつ数えることになり, 左辺と等しい。

《参考文献》

〔1〕 http://www.dnc.ac.jp/modules/center-exam/content0232.html

(東京都　巣鴨高等学校)