置き換えは積極的に

中瀬古（なかせこ）　佳史（よしふみ）

§0. はじめに

高校数学ではさまざまな場面に「置き換え」が現れます。今回は，自分で置き換えに気づいて積極的に行うことで見通しのよくなる例を紹介しようと思います。特に後半に多く取り上げた不等式の問題におけるパワーを感じていただければ幸いです。

§1. 恒等式の問題

【問題１】 すべての x に対して，

$$x^3-3x^2+7=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$$

となる数 a，b，c，d を求めよ。〔06 福島大〕

置き換えに気づいて欲しいのですが，素直な生徒達はそのまま右辺を展開し始めます。こういう問題で置き換えを意識する練習をさせています。

【解答】 $x-2=t$ とおくと，$x=t+2$ であり，与式に代入すると，

$$(t+2)^3-3(t+2)^2+7=at^3+bt^2+ct+d$$

$$\therefore\quad t^3+6t^2+12t+8-3t^2-12t-12+7=at^3+bt^2+ct+d$$

$$\therefore\quad t^3+3t^2+3=at^3+bt^2+ct+d$$

これは t に関する恒等式であるから，両辺の係数を比較して，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=3}$，$\boldsymbol{c=0}$，$\boldsymbol{d=3}$

§2. 求値問題

【問題２】 $a+b=\dfrac{5}{3}$，$(a-2)^2+(b+2)^2=\dfrac{7}{9}$ のとき

$$\frac{2a+b-2}{(a-2)(b+2)^2}+\frac{a+2b+2}{(a-2)^2(b+2)}$$ の値を求めよ。

〔09 松山大〕

そのまま地道に解こうとすると大変な計算になり，路頭に迷ってしまいます。

【解答】 $a-2=x$，$b+2=y$ とおくと，$a=x+2$，$b=y-2$ であるから，

$$a+b=\frac{5}{3}\iff(x+2)+(y-2)=\frac{5}{3}$$

$$\iff x+y=\frac{5}{3}$$

$$(a-2)^2+(b+2)^2=\frac{7}{9}\iff x^2+y^2=\frac{7}{9}$$

$$\therefore\quad xy=\frac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{7}{9}\right\}=1$$

このとき，

$$\frac{2a+b-2}{(a-2)(b+2)^2}+\frac{a+2b+2}{(a-2)^2(b+2)}$$

$$=\frac{2(x+2)+(y-2)-2}{xy^2}+\frac{(x+2)+2(y-2)+2}{x^2y}$$

$$=\frac{2x+y}{xy^2}+\frac{x+2y}{x^2y}=\frac{2x^2+xy+xy+2y^2}{x^2y^2}$$

$$=\frac{2(x^2+xy+y^2)}{(xy)^2}=\frac{2\left(\frac{7}{9}+1\right)}{1}=\boldsymbol{\frac{32}{9}}$$

§3. 剰余の問題

【問題３】 n を３以上の整数として，x^n を $(x-1)^3$ で割った余りを求めよ。〔07 関西大・改〕

原題は「$(x-1)^2$ で割った余り」を求める問題でした。２乗ならば剰余の定理を用いてうまく工夫して解けますが，３乗になると厳しいです。また理系ならば微分を用いる解法なども有名ですが，やはり $x-1=t$ と置き換えて二項定理を用いる解法をマスターさせたいと思います。

【解答】 $x-1=t$ とおくと $x=t+1$ であるから，$(t+1)^n$ を t^3 で割った余りを考えればよい。

二項定理により，

$$(t+1)^n$$

$$=t^n+{}_nC_1t^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-3}t^3+{}_nC_{n-2}t^2+{}_nC_{n-1}t+1$$

$$=(t^3\text{ で割り切れる式})+{}_nC_2t^2+{}_nC_1t+1$$

$=(t^3$ で割り切れる式$)+\dfrac{n(n-1)}{2}t^2+nt+1$

よって，求める余りは

$$\frac{n(n-1)}{2}t^2+nt+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2+n(x-1)+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}x^2-n(n-1)x+\frac{n(n-1)}{2}+nx-n+1$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(n-1)}{2}x^2-n(n-2)x+\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

§4. 3次方程式の解の問題

【問題4】 実数の間の等式

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2 \cdots\cdots(*)$$

を以下の手順に従って示せ。

(1) 係数が整数である x の3次方程式で $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを1つ求めよ。

(2) (1)で求めた3次方程式を解くことにより，等式$(*)$を証明せよ。〔09 東北大・理(後期)〕

最近よく見かける問題ですが，見た目がゴツゴツしていて，どう手をつけてよいかわからない生徒が多いと思います。$x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ を3乗しますが，そのまま計算すると書く量が多いし，ミスを誘発する可能性が高いです。しかし，ほんの少しの置き換えで見通しが極めてよくなります。

【解答】 (1) $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$，$b=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とおくと，$x=a-b$ であり，両辺を3乗すると

$$x^3=(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$=(a^3-b^3)-3ab(a-b) \cdots\cdots①$$

ここで，$a^3-b^3=(5\sqrt{2}+7)-(5\sqrt{2}-7)=14$

$$ab=\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}=\sqrt[3]{50-49}=1$$

であるから，これらを①に代入して，

$$x^3=14-3\cdot1\cdot x \qquad \therefore\ \boldsymbol{x^3+3x-14=0}$$

(2) (1)の3次方程式から，

$$(x-2)(x^2+2x+7)=0$$

$$\therefore\ x=2,\ -1\pm\sqrt{6}i$$

$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ は(1)の3次方程式の実数解であるから，$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$ ■

【参考】 $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}=\sqrt{2}+1$

$\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=\sqrt{2}-1$ に気づけば，(1)の誘導も置き換えも不要で，$(*)$は即座に証明できます。でも，なかなか気づきません……。

§5. ベクトルの問題

【問題5】 平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=1,\ |2\vec{a}+\vec{b}|=1$$

であるとき，$|\vec{a}-3\vec{b}|$ の最大値を求めよ。

〔07 防衛大〕

いくつかの解法が考えられます。しかし，このようなタイプの問題を見るたびに

「置き換え＋解き直し」(変数変換)の有効性

に気づかされます。

【解答】 $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{x}$ ……①，$2\vec{a}+\vec{b}=\vec{y}$ ……②

とおき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$ で表す。

②×2−① より，

$$3\vec{a}=-\vec{x}+2\vec{y} \quad \therefore\ \vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y} \cdots\cdots③$$

③を②に代入して，

$$\vec{b}=\vec{y}-2\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y} \cdots\cdots④$$

③，④より，

$$\vec{a}-3\vec{b}=\left(-\frac{1}{3}\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}\right)-3\left(\frac{2}{3}\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}\right)$$

$$=-\frac{7}{3}\vec{x}+\frac{5}{3}\vec{y}$$

条件より，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ であるから，

$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=\frac{49}{9}|\vec{x}|^2-\frac{70}{9}\vec{x}\cdot\vec{y}+\frac{25}{9}|\vec{y}|^2$$

$$=\frac{74}{9}-\frac{70}{9}\vec{x}\cdot\vec{y} \cdots\cdots⑤$$

ここで，$-|\vec{x}||\vec{y}|\leqq\vec{x}\cdot\vec{y}\leqq|\vec{x}||\vec{y}|$

$$\iff -1\leqq\vec{x}\cdot\vec{y}\leqq1$$

であるから，

$$⑤\leqq\frac{74}{9}-\left(-\frac{70}{9}\right)=16 \qquad \therefore\ |\vec{a}-3\vec{b}|\leqq4$$

等号は $\vec{x}\cdot\vec{y}=-1$，すなわち $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の向きが反対のときに成り立つ。

したがって，$|\vec{a}-3\vec{b}|$ の最大値は **4**

§6. 関数の値域の問題

【問題6】 1次関数 $f(x)=ax+b$ で，次の条件

$$3\leqq f(1)\leqq6,\ 4\leqq f(2)\leqq8$$

を満たすものを考える。このような $f(x)$ の中で，

(1) $f(5)$ が最大となるときの a，b の値とそのときの $f(5)$ の値を求めよ。

(2) $f(5)$ が最小となるときの a, b の値とそのときの $f(5)$ の値を求めよ。〔09 上智大・改〕

普通に解く場合は，以下のようになります。

「$f(1)=a+b$, $f(2)=2a+b$ であるから，与えられた条件は $3\leqq a+b\leqq 6$, $4\leqq 2a+b\leqq 8$ となり，これらを満たすような a, b について $f(5)=5a+b$ の最大，最小を考えればよいので，ab 平面上の領域と直線が少なくとも1つの共有点をもつような a, b の値を求めればよい。」

ただ，この解法は図を描いて直線の傾きに注意して……など手間が多くミスを誘発する可能性が高いと思います。ここでも，「置き換え＋解き直し」が有効です。

【解答】 $f(1)=a+b$, $f(2)=2a+b$ を a, b について解くと，

$$a=-f(1)+f(2),\quad b=2f(1)-f(2)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(5)&=5a+b\\&=5(-f(1)+f(2))+(2f(1)-f(2))\\&=-3f(1)+4f(2)\end{aligned}$$

$3\leqq f(1)\leqq 6$ より，$-18\leqq -3f(1)\leqq -9$ ……①

$4\leqq f(2)\leqq 8$ より，$16\leqq 4f(2)\leqq 32$ ……②

①，②の辺々加えて，

$$-2\leqq -3f(1)+4f(2)=f(5)\leqq 23$$

左側の等号は，$f(1)=6$, $f(2)=4$, すなわち $a=-2$, $b=8$ のとき成り立つ。

右側の等号は，$f(1)=3$, $f(2)=8$, すなわち $a=5$, $b=-2$ のとき成り立つ。

(1) **$a=5$, $b=-2$ のとき，$f(5)$ は最大値 23**

(2) **$a=-2$, $b=8$ のとき，$f(5)$ は最小値 -2**

§7. 不等式の証明問題

【問題7】 x, y, z が $x+y+z\geqq 3$ を満たすとき，

$$x^2+y^2+z^2\geqq x+y+z$$

が成り立つことを証明せよ。〔室蘭工業大〕

私は最初，コーシー・シュワルツの不等式を考えましたが，多少の発想力が必要です。「少しずらして置き換える」という発想は，不等式の問題ではなかなか役に立ちます。

【解答】 $x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$ とおくと，$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$ であり，

$$x+y+z\geqq 3 \iff X+Y+Z\geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-(x+y+z)\\&=(X+1)^2+(Y+1)^2+(Z+1)^2\\&\quad-(X+Y+Z+3)\\&=X^2+2X+1+Y^2+2Y+1+Z^2+2Z+1\\&\quad-X-Y-Z-3\\&=X^2+Y^2+Z^2+X+Y+Z\geqq 0\ (\because\ ①)\end{aligned}$$

よって，不等式は証明された。■

【問題8】 a, b, c が任意の実数のとき，不等式

$$(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+\frac{3}{4}\geqq a+b+c$$

を示せ。

固まりを置き換えると，平方完成をして終わりです。

【解答】 $a+b-c=x$, $b+c-a=y$, $c+a-b=z$ とおくと，$x+y+z=a+b+c$ であるから，

$$x^2+y^2+z^2+\frac{3}{4}\geqq x+y+z$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2+\frac{3}{4}-x-y-z\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\\&\quad+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0\end{aligned}$$

よって，不等式は証明された。■

【問題9】 n を2以上の整数とし，$3n$ 個の実数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n,$$
$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n,$$
$$y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_n$$

が $0<a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_n$ および，n 個の不等式

$$\sum_{i=1}^{j}a_ix_i\leqq\sum_{i=1}^{j}a_iy_i\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

を満たしているならば，$\sum_{i=1}^{n}x_i\leqq\sum_{i=1}^{n}y_i$ であることを証明せよ。〔08 東京工業大・(1)省略〕

かなりの難問です。帰納法による解法が一般的だと思いますが，差を置き換えて変数と見て解き直すと，帰納法を頼らずに解けます。

【解答】 $\sum_{i=1}^{j} a_i x_i \leqq \sum_{i=1}^{j} a_i y_i\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるから，次のように $t_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とおくと，$t_j \geqq 0$ である。

$$t_1 = a_1(y_1 - x_1)$$
$$t_2 = a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2)$$
$$t_3 = a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2) + a_3(y_3 - x_3)$$
$$\vdots$$
$$t_n = a_1(y_1 - x_1) + a_2(y_2 - x_2) + a_3(y_3 - x_3) + \cdots\cdots + a_{n-1}(y_{n-1} - x_{n-1}) + a_n(y_n - x_n)$$

これらの式と $a_j > 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ より，

$$t_1 = a_1(y_1 - x_1) \qquad \therefore\ y_1 - x_1 = \frac{t_1}{a_1}$$
$$t_2 = t_1 + a_2(y_2 - x_2) \qquad \therefore\ y_2 - x_2 = \frac{t_2 - t_1}{a_2}$$
$$t_3 = t_2 + a_3(y_3 - x_3) \qquad \therefore\ y_3 - x_3 = \frac{t_3 - t_2}{a_3}$$
$$\vdots$$
$$t_n = t_{n-1} + a_n(y_n - x_n) \qquad \therefore\ y_n - x_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{a_n}$$

このとき，$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n$ であるから，

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)$$
$$= \frac{t_1}{a_1} + \frac{t_2 - t_1}{a_2} + \frac{t_3 - t_2}{a_3} + \cdots\cdots + \frac{t_n - t_{n-1}}{a_n}$$
$$\geqq \frac{t_1 + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \cdots\cdots + t_n - t_{n-1}}{a_n}$$
$$= \frac{t_n}{a_n} \geqq 0$$

よって，$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} y_i$ ■

【問題 10】 $x,\ y,\ z > 0$ のとき，不等式

$$\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} \geqq \frac{3}{2}$$

を示せ。また，等号は $x=y=z$ のときに成立することを示せ。 (Nesbitt の不等式)

私は入試問題において本問を見かけたことがありません。コーシー・シュワルツの不等式を用いる解法，相加平均と調和平均の関係を用いる解法などいろいろ知られていますが，どれも解法がひらめきにくいです。それだけ難しいのだと思います。

しかし，本問も「置き換え＋解き直し」を考えると，相加・相乗平均の不等式が見えてきて，簡単に解けます。

【解答】 $x+y=a$ ……①
$y+z=b$ ……②
$z+x=c$ ……③

とおき，$x,\ y,\ z$ の連立方程式として解く。

$\dfrac{①+②+③}{2}$ より $x+y+z = \dfrac{a+b+c}{2}$ ……④

④−① より $z = \dfrac{-a+b+c}{2}$

④−② より $x = \dfrac{a-b+c}{2}$

④−③ より $y = \dfrac{a+b-c}{2}$

$$\therefore\ \frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x}$$
$$= \frac{\frac{-a+b+c}{2}}{a} + \frac{\frac{a-b+c}{2}}{b} + \frac{\frac{a+b-c}{2}}{c}$$
$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{b+c}{2a}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{a+c}{2b}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{a+b}{2c}\right)$$
$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\right\}$$
……⑤

$x,\ y,\ z > 0$ と①〜③より $a,\ b,\ c > 0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より，

$$⑤ \geqq -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}\right)$$
$$= -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

よって，不等式は証明された。

また，等号が成り立つのは，

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} \text{ かつ } \frac{c}{b} = \frac{b}{c} \text{ かつ } \frac{a}{c} = \frac{c}{a}$$

すなわち，　$a^2 = b^2$ かつ $b^2 = c^2$ かつ $c^2 = a^2$

のときであるが，$a,\ b,\ c > 0$ から，$a = b = c$ のときである。

したがって，

$$x+y = y+z = z+x \Longleftrightarrow x = y = z$$

のときに等号が成立する。 ■

《参考文献》

〔1〕 全国大学入試問題正解　旺文社
〔2〕 大学への数学 2009 年 4 月号，5 月号　東京出版
〔3〕 改訂版数学 I　数研出版
〔4〕 Studyaid D.B.　数研出版

（大阪府　同志社香里高等学校）