階乗で表された有理数が整数であることの証明方法について

柳田（やなぎた） 五夫（いつお）

§1. はじめに

ガウス記号の不等式を用いて，階乗で表された有理数が整数であることの証明方法を紹介したい。

例えば，$Q=\dfrac{(6n+2)!\,n!}{(3n+1)!\{(2n)!\}^2}$ が整数であることを証明するには，この式に対応する不等式

$m\,(\geqq 2)$，n が整数のとき

$$\left[\frac{6n+2}{m}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]\geqq\left[\frac{3n+1}{m}\right]+2\left[\frac{2n}{m}\right]$$

を作り，成立するかどうか確かめる。成立することがわかれば，任意の素数 p に対して，Q の分子が p で割り切れる回数から Q の分母が p で割り切れる回数を引いたものが正または 0 であることを示せばよい。

§2. ガウス記号

ガウス記号 $[x]$ は，実数 x を超えない最大の整数として定義される。($[x]$ は x の整数部分を表す。) ガウス記号の基本的な性質を次にまとめておく。

(G0)	n が整数のとき $[x+n]=[x]+n$
(G1)	$[x]\leqq x<[x]+1$，$[x]+[y]\leqq[x+y]$
(G2)	$x\leqq y$ ならば $[x]\leqq[y]$
(G3)	$x<[x]+\dfrac{1}{2}$ ならば $[2x]=2[x]$
	$[x]+\dfrac{1}{2}\leqq x$ ならば $[2x]=2[x]+1$

[証明] (G0) $[x]=p$ とおくと，$p\leqq x<p+1$ から $p+n\leqq x+n<p+n+1$ となる。

よって $[x+n]=p+n=[x]+n$

(G1) $[x]=p$ とおくと，$p\leqq x<p+1$

すなわち $[x]\leqq x<[x]+1$ が成り立つ。

$[x]\leqq x<[x]+1$，$[y]\leqq y<y+1$ から

$[x]+[y]\leqq x+y<[x]+[y]+2$ となる。

したがって $[x]+[y]\leqq[x+y]\leqq[x]+[y]+1$

(G2) $[x]=p$ とおくと，$x\leqq y$，$p\leqq x<p+1$ が成り立つから，$p\leqq y$

したがって $p\leqq[y]$ すなわち $[x]\leqq[y]$

(逆は成り立たないことに注意!!)

(G3) $[x]\leqq x<[x]+\dfrac{1}{2}$ のとき

$2[x]\leqq 2x<2[x]+1$ から $[2x]=2[x]$

$[x]+\dfrac{1}{2}\leqq x<[x]+1$ のとき

$2[x]+1\leqq 2x<2[x]+2$ から $[2x]=2[x]+1$ ■

整数がある素数で割り切れる回数を知りたいので次の事実を確認しておく。(参考文献 [1] 参照)

> 正の整数 n に対して，$n!$ が素数 p で割れる回数は
>
> $$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$
>
> に等しい。

正の整数 n が素数 p で割れる回数を，$f_p(n)$ とし，正の有理数 $x=\dfrac{n}{m}$ (m，n は正の整数) に対して $f_p(x)=f_p(n)-f_p(m)$ で定義する。定義から

$$f_p(n!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

となる。

$f_p(n!)$ については，次の問題等で具体的に確かめてみると良い。

> n を自然数とする。219! は 2^n で割り切れるが，2^{n+1} では割り切れないとき，n の値を求めよ。
>
> 〔2008 早稲田大・教育〕

§3. ガウス記号の不等式

正の有理数 $x=\dfrac{n}{m}$ が整数となるのは，任意の素数 p に対して $f_p(n)-f_p(m)\geqq 0$ が成り立つときである。ここでは，階乗のみを含む有理数について考えてみる。

> [例 1]　$k(\geqq 1)$，$m(\geqq 2)$，n を整数とするとき，
> $$\left[\frac{kn+n}{m}\right]\geqq\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{kn+1}{m}\right]\quad\cdots\cdots①$$
> が成り立つ。

[証明]　n を m で割ったときの商を q，余りを $n_1\,(0\leqq n_1\leqq m-1)$ とおくと　$n=mq+n_1$

$$①\iff(k+1)q+\left[\frac{kn_1+n_1}{m}\right]\geqq q+\left[\frac{n_1}{m}\right]+kq+\left[\frac{kn_1+1}{m}\right]$$

$$\iff\left[\frac{kn_1+n_1}{m}\right]\geqq\left[\frac{n_1}{m}\right]+\left[\frac{kn_1+1}{m}\right]$$

したがって，①が　$n\in\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\}$ に対して成立することを示せばよい。

このとき，$\left[\dfrac{n}{m}\right]=0$ であるから

$$①\iff\left[\frac{kn+n}{m}\right]\geqq\left[\frac{kn+1}{m}\right]$$

$n=0$ のとき，上の不等式は成り立つ。

$n\geqq 1$ のとき，$\dfrac{kn+n}{m}\geqq\dfrac{kn+1}{m}$ が成り立つ。

(G2) から $\left[\dfrac{kn+n}{m}\right]\geqq\left[\dfrac{kn+1}{m}\right]$ すなわち①は成り立つ。■

> k，n が正の整数のとき，
> $$P=\frac{1}{kn+1}{}_{(k+1)n}\mathrm{C}_n=\frac{(kn+n)!}{n!(kn+1)!}$$
> は整数である。

[証明]　任意の素数 p に対して

$$f_p(P)=f_p((kn+n)!)-f_p(n!)-f_p((kn+1)!)$$

が正または 0 であることを示せばよい。

$$\begin{aligned}f_p(P)&=f_p((kn+n)!)-f_p(n!)-f_p((kn+1)!)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{kn+n}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{kn+1}{p^i}\right]\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{kn+n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{kn+1}{p^i}\right]\right\}\geqq 0\end{aligned}$$

(∵①)

したがって，P は整数である。■

P は $k=1$ のとき $\dfrac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n={}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$ となり有名なカタラン数である。

> [例 2]　$m\,(\geqq 2)$，n を整数とするとき，
> $$\left[\frac{6n+2}{m}\right]-\left[\frac{3n+1}{m}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]\geqq 2\left[\frac{2n}{m}\right]\quad\cdots\cdots②$$
> が成り立つ。

[証明]　n を m で割ったときの商を q，余りを n_1 $(0\leqq n_1\leqq m-1)$ とおくと　$n=mq+n_1$

$$②\iff 6q+\left[\frac{6n_1+2}{m}\right]-3q-\left[\frac{3n_1+1}{m}\right]+q+\left[\frac{n_1}{m}\right]\geqq 4q+2\left[\frac{2n_1}{m}\right]$$

$$\iff\left[\frac{6n_1+2}{m}\right]-\left[\frac{3n_1+1}{m}\right]+\left[\frac{n_1}{m}\right]\geqq 2\left[\frac{2n_1}{m}\right]$$

したがって，一般性を失うことなく，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ に対して成立することを示せばよい。

このとき，$\left[\dfrac{n}{m}\right]=0$ であるから

$$②\iff\left[\frac{6n+2}{m}\right]-\left[\frac{3n+1}{m}\right]\geqq 2\left[\frac{2n}{m}\right]$$

$n=0$ のとき上の不等式は成り立つ。

(1)　$\dfrac{3n+1}{m}<\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]+\dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots(*1)$ の場合

(G3) より $\left[\dfrac{6n+2}{m}\right]=2\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]$ が成り立つから　$②\iff\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]\geqq 2\left[\dfrac{2n}{m}\right]$　$\cdots\cdots(*2)$

(G2) から $\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]\geqq\left[\dfrac{2n}{m}\right]$ が成り立っている。

$(*2)$ が成り立つことを示すには，$\left[\dfrac{2n}{m}\right]=0$ のとき $\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]\geqq 0$ であるから，$\left[\dfrac{2n}{m}\right]=1$ のとき $\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]\geqq 2$ であることを示せばよい。

$\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]=1$ とすれば $(*1)$ から $\dfrac{3n+1}{m}<\dfrac{3}{2}$ すなわち $3n+1<\dfrac{3m}{2}$ を得る。

また $\left[\dfrac{2n}{m}\right]=1$ から $1\leqq\dfrac{2n}{m}$ すなわち $\dfrac{3m}{2}\leqq 3n$

を得るが，これは $3n+1<\dfrac{3m}{2}$ に矛盾する。

したがって，$\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]\geqq 2$ となるから（＊2）すなわち②は成り立つ。

(2) $\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]+\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{3n+1}{m}$ の場合

(G3) より $\left[\dfrac{6n+2}{m}\right]=2\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]+1$ が成り立つから

$$② \Longleftrightarrow \left[\frac{3n+1}{m}\right]+1\geqq 2\left[\frac{2n}{m}\right] \quad \cdots\cdots(*3)$$

$\left[\dfrac{2n}{m}\right]=0$ のとき，$\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]\geqq\left[\dfrac{2n}{m}\right]\geqq 0$ であるから，（＊3）は成り立つ。

$\left[\dfrac{2n}{m}\right]=1$ のとき，$\left[\dfrac{3n+1}{m}\right]\geqq\left[\dfrac{2n}{m}\right]\geqq 1$ であるから，（＊3）は成り立つ。■

$Q=\dfrac{(6n+2)!\,n!}{(3n+1)!\{(2n)!\}^2}$ が整数であることは，不等式②を用いて証明できる。

大学入試には，横浜国立大学で $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!\,n!(m+n)!}$ が整数となることの証明問題が出題されている。

> 0 以上の整数 m，n に対し，
>
> $$a_{m,n}=\frac{(2m)!(2n)!}{m!\,n!(m+n)!}$$
>
> とする。ただし，$0!=1$ である。次の問いに答えよ。
>
> (1) $a_{m,n+1}+a_{m+1,n}=4a_{m,n}$ が成り立つことを証明せよ。
>
> (2) $a_{m,n}$ は整数であることを証明せよ。
>
> 必要ならば組合せの数 ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ が整数であることを用いてもよい。
>
> 〔2002 横浜国大〕

$a_{m,n}$ が整数であることの証明は，対応する不等式 $l(\geqq 2)$，m，n が整数のとき

$$\left[\frac{2m}{l}\right]+\left[\frac{2n}{l}\right]\geqq\left[\frac{m}{l}\right]+\left[\frac{n}{l}\right]+\left[\frac{m+n}{l}\right] \quad \cdots\cdots③$$

が成立することでも証明できる。

m，n を l で割ることにより，（例 1，例 2 と同じように m，n を l で割ったときの余りを考えて）一般性を失うことなく，$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$ に対して成立することを示せばよい。

このとき，$\left[\dfrac{m}{l}\right]=0$，$\left[\dfrac{n}{l}\right]=0$ であるから

$$③ \Longleftrightarrow \left[\frac{2m}{l}\right]+\left[\frac{2n}{l}\right]\geqq\left[\frac{m+n}{l}\right] \quad \cdots\cdots(*4)$$

$0\leqq\dfrac{m+n}{l}<1$ のときは $\left[\dfrac{m+n}{l}\right]=0$ となるので $\left[\dfrac{2m}{l}\right]\geqq 0$，$\left[\dfrac{2n}{l}\right]\geqq 0$ より（＊4）は成り立つ。

$1\leqq\dfrac{m+n}{l}<2$ のときは $\left[\dfrac{m+n}{l}\right]=1$ となる。

$l\leqq m+n$ より $m\geqq\dfrac{l}{2}$ または $n\geqq\dfrac{l}{2}$ が成り立つ。したがって

$\left[\dfrac{2m}{l}\right]\geqq 1$ または $\left[\dfrac{2n}{l}\right]\geqq 1$ から（＊4）は成り立つ。

§4. おわりに

$f_p(n!)$ に関する問題を次にあげておく。正の整数 n が素数 p で割れる回数を，$f_p(n)$ とし，正の有理数 $x=\dfrac{n}{m}$（m，n は正の整数）に対して $f_p(x)=f_p(n)-f_p(m)$ と定義した。定義から

$$f_p(n!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] \text{ が成り立つ。}$$

> p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。
>
> 〔2009 京都大〕

> n を 2 以上の自然数として，階乗 $n!$ を素数の積で表すときに現れる 2 の個数を a_n とおく。すなわち $\dfrac{n!}{2^{a_n}}$ は奇数である。
>
> (1) $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ は奇数であることを示せ。
>
> (2) $a_{2n}-a_n$ を n を用いて表せ。
>
> (3) $n=2^k$（k は自然数）のとき，a_n を n を用いて表せ。
>
> (4) $a_n<n$ を示せ。
>
> (5) $\sqrt[n]{n!}$ は無理数であることを示せ。
>
> 〔2009 滋賀医大〕

$$a_n=f_2(n!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right] \quad \cdots\cdots④$$

であるから，(2)は

$$a_{2n}=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{2^i}\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^{i-1}}\right]=n+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{n}{2^{i-1}}\right]=n+a_n$$

から，$a_{2n}-a_n=n$ を得る。

(1)は式変形

$$(2n)!=(2n)!!(2n-1)!!=2^n n!(2n-1)!!$$

を使って証明できるが f_2 と(2)，f_p を用いて示すこともできる。

$$f_2\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)=f_2((2n)!)-f_2(2^n)-f_2(n!)$$

$$=a_{2n}-n-a_n=0$$

であることと，

m，n が正の整数のとき，$\left[\frac{2n}{m}\right]\geqq\left[\frac{n}{m}\right]$ が成り立つことから，2 以外の素数 p に対して，

$$f_p\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)=f_p((2n)!)-f_p(2^n)-f_p(n!)$$

$$=f_p((2n)!)-f_p(n!)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]\right)\geqq 0$$

が成り立つことからである。

(3)は京都大学の問題と同様に

$$a_n=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2^k}{2^i}\right]=\sum_{i=1}^{\infty}[2^{k-i}]=\sum_{i=1}^{k}2^{k-i}=\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}$$

$$=\frac{2^k-1}{2-1}=n-1$$

と求められる。

(4)は次のように示すこともできる。

2 以上の自然数 n に対して $2^k\leqq n<2^{k+1}$ を満たす自然数 k が (一意に) 存在する。このとき，$i\geqq k+1$ ならば $0<\frac{n}{2^i}\leqq\frac{n}{2^{k+1}}<1$ から $\left[\frac{n}{2^i}\right]=0$ となることに注意すると

$$a_n=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right]=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{2^i}\right]\leqq\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{2^i}\quad(\because(\mathrm{G1}))$$

$$=n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}<n$$

(5)は背理法で示すことができる。

$\sqrt[n]{n!}$ が有理数であると仮定して

$$\sqrt[n]{n!}=\frac{p}{q}\ (p \text{ と } q \text{ は互いに素な正の整数})$$

とおくと $n!=\frac{p^n}{q^n}$ から $n!\,q^{n-1}=\frac{p^n}{q}$

$n!\,q^{n-1}$ は整数であるから $\frac{p^n}{q}$ は整数となる。

ところで p と q は互いに素であるから $q=1$ である。

したがって

$$n!=p^n$$

定義から $n!=2^{a_n}M_n$ (M_n は奇数) とおくと

$$2^{a_n}M_n=p^n$$

$n\geqq 2$ より $a_n\geqq 1$ であるから p は偶数である。

$p=2^l M$ (l は正の整数，M は奇数) とおくと

$$2^{a_n}M_n=2^{ln}M^n$$

この式から $a_n=ln$ $(l\geqq 1)$ となり $a_n<n$ であることに矛盾する。したがって $\sqrt[n]{n!}$ は無理数である。

《参考文献》

〔1〕 И.M. ヴィノグラードフ著　三瓶与右衛門
山中 健　訳　整数論入門　共立全書　$p.18$

(栃木県立佐野高等学校)