円と直線の判別式 H を使った演習

高橋(たかはし)　敏雄(としお)

§1. はじめに

円 $x^2+y^2=5$ …① と直線 $y=x+1$ …② の共有点の個数の問題で，普通であれば②の式を①の式に代入して，２次方程式を導き，その判別式から判定をするのが常套の解法である。確かに代入から展開そして判別式と持っていくのには，多少の計算力がいる。その意味で今までの方法が数十年と続いているのであろう。教師を長年勤めると，授業中に簡単な解法を思いつくことがある。今回その些細な一つを紹介したい。

§2. 円と直線の判別式 H

いま，円 $x^2+y^2=r^2$…(＊) と直線 $ax+by+c=0$ …(＊′) を考える。この円と直線の判別式を次のように定義する。すなわち

$$H=(a^2+b^2)r^2-c^2$$

である。そこで，(＊) と (＊′) の位置関係が分かる。

(i)　$H>0 \Longleftrightarrow$ 異なる２点で交わる

(ii)　$H=0 \Longleftrightarrow$ １点で接する

(iii)　$H<0 \Longleftrightarrow$ 離れている

がいえるのである。

証明は，(i)のみ示す。$H>0 \Leftrightarrow (a^2+b^2)r^2-c^2>0$，よって $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$ となり，異なる２点で交わることが示された。他の２つの場合も同様に証明できる。次に具体的な例題の演習を行ってみよう。

§3. 円と直線の位置関係（Ⅰ）

例1.　次の円と直線の位置関係を調べよ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots① \\ 2x-y+5=0 & \cdots② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=18 & \cdots① \\ y=x-6 & \cdots② \end{cases}$

(解)　(1)　$H=(4+1)\times 10-5^2=25>0$

ゆえに，異なる２点で交わる。

(2)　②より $x-y-6=0$　$H=(1+1)\times 18-6^2=36-36=0$　ゆえに，１点で接する。　■

例2.　直線 $\sqrt{3}x-y+n=0$ と，円 $x^2+y^2=4$ が共有点をもたないような定数 n の値の範囲を求めよ。

(解)　共有点をもたないから，

$H=(3+1)\times 4-n^2=16-n^2<0$

よって，$n^2-16>0$

ゆえに　$n<-4$，$4<n$ である。　■

この問題を従来の解き方で解くと，直線の方程式を円の方程式に代入する。すなわち，

$x^2+(\sqrt{3}x+n)^2=4$　整理して

$4x^2+2\sqrt{3}nx+n^2-4=0$

共有点をもたないから，$D<0$

判別式

$D=(2\sqrt{3}n)^2-4\cdot 4(n^2-4)=12n^2-16n^2+64$

$=-4n^2+64<0$

よって，$n^2-16>0$

ゆえに　$n<-4$，$4<n$ となる。　(解終)

以上で，H の公式を使うと如何に簡単かということが分かる。

例3.　円 $x^2+y^2=20$ と直線 $y=2x+m$ が共有点をもつような定数 m の値の範囲を求めよ。

(解)　共有点をもつから

$H=(4+1)\times 20-m^2=100-m^2\geqq 0$

よって，$m^2-100\leqq 0$

ゆえに，$-10\leqq m\leqq 10$　■

§4. 円と直線の位置関係（Ⅱ）

公式1.　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，$x_1x+y_1y=r^2$ である。

(証)　点Pを通る直線の方程式を

$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ …① とおく。整理して，

$ax+by-ax_1-b_1=0$

この直線と円が接するから，$H=0$

$H=(a^2+b^2)r^2-(-ax_1-by_1)^2$

$=(a^2+b^2)(x_1{}^2+y_1{}^2)-(ax_1+by_1)^2$

$=a^2y_1{}^2+b^2x_1{}^2-2ax_1=(ay_1-bx_1)^2$,

よって，　$ay_1=bx_1$

①の両辺に y_1 を掛ける。

$ay_1(x-x_1)+by_1(y-y_1)=0$

ゆえに，$bx_1(x-x_1)+by_1(y-y_1)=0$

a と b は同時に 0 にはならないから，$b\neq 0$

$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$

$x_1x+y_1y-(x_1{}^2+y_1{}^2)=0$　$x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$ より

$x_1x+y_1y=r^2$ を得る。 ■

例 4.　円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $2x+y-5=0$ が接するときの半径 r の値を求めよ。

（解）　円と直線は接するから，

$H=(4+1)\times r^2-25=0$ が成り立つ。

よって，$r^2=5$　$r>0$ より　　$r=\sqrt{5}$ ■

なお，例 4 の接点の座標は，公式 1 を用いて，円の方程式が $x^2+y^2=5$ で，接線の方程式が $2x+y-5=0$ より，$2x+y=5$ だから，点 (2, 1) である。

例 5.　点 A(3, 1) から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式を求めよ。

（解）　点 A を通る直線の方程式を

$a(x-3)+b(y-1)=0$ …① とおく。

整理して，$ax+by-3a-b=0$

この直線と円 $x^2+y^2=5$ が接するから，$H=0$ である。

すなわち，

$H=(a^2+b^2)\times 5-(-3a-b)^2$

$=5a^2+5b^2-9a^2-6ab-b^2$

$=-4a^2-6ab+4b^2$

よって，$2a^2+3ab-2b^2=0$　$(2a-b)(a+2b)=0$

$\therefore$　$b=2a$, $a=-2b$

(i)　$b=2a$ のとき，①に代入。

$a(x-3)+2a(y-1)=0$

a と b は同時に 0 にはならないから $a\neq 0$ より，

$(x-3)+2(y-1)=0$　整理して，

$x+2y-5=0$

(ii)　$a=-2b$ のとき，①に代入。

$-2b(x-3)+b(y-1)=0$　$b\neq 0$ より

よって，　$-2(x-3)+(y-1)=0$

整理して，$2x-y-5=0$

求める接線の方程式は，

$x+2y-5=0$, $2x-y-5=0$ ■

なお，例 4 と同様にして，例 5 の接点の座標は，$x+2y-5=0$, $2x-y-5=0$ より，

$x+2y=5$, $2x-y=5$ であるから，接点の座標はそれぞれ，点 (1, 2), (2, −1) となる。

例 6.　円 $x^2+y^2=10$ の接線のうち，傾きが $\frac{1}{3}$ である接線の方程式を求めよ。

（解）　傾きが $\frac{1}{3}$ である直線の方程式を，

$x-3y+c=0$ とおく。接するから $H=0$

判別式 $H=(1+9)\times 10-c^2=100-c^2=0$

$\therefore$　$c=\pm 10$

よって，　$x-3y+10=0$, $x-3y-10=0$ ■

またこの場合も同様に，接線の方程式が

$-x+3y=10$, $x-3y=10$ であるから，接点の座標はそれぞれ，点 (−1, 3), (1, −3) である。

§5. 円と直線の位置関係 (III)

公式 2　円 $x^2+y^2=r^2$ が直線 $ax+by+c=0$ を切り取る線分の長さを l とおく。

$$l=2\sqrt{\frac{H}{a^2+b^2}}$$

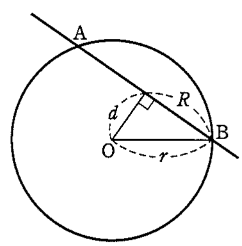
（証）　$d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるから，

$R=\sqrt{r^2-d^2}$

$=\sqrt{r^2-\dfrac{c^2}{a^2+b^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)r^2-c^2}{a^2+b^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{H}{a^2+b^2}}$



よって，求める線分 l は

$AB=l=2R$

$=2\sqrt{\dfrac{H}{a^2+b^2}}$ である。 ■

公式 3　円 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ が直線 $ax+by+c=0$ を切り取る線分の長さを l とおく。

$$l=2\sqrt{\frac{H}{a^2+b^2}}$$
$$=2\sqrt{\frac{(a^2+b^2)r^2-(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}}$$

(証) 円 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ の中心 $(x_1,\ y_1)$ が原点に移る平行移動を考える。この平行移動によって，この円と直線はそれぞれ円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $ax+by+ax_1+by_1+c=0$ に移るから，切り取る線分の長さ l は，

$$l=2\sqrt{\frac{H}{a^2+b^2}}$$
$$=2\sqrt{\frac{(a^2+b^2)r^2-(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}}$$

となる。 ∎

例 7. 円 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ が直線 $x+y-1=0$ を切り取る線分の長さ l を求めよ。

(解) 円の中心 $(1,\ -1)$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると，円と直線の方程式はそれぞれ

円 $x^2+y^2=2$，直線 $(x+1)+(y-1)-1=0$ より $x+y-1=0$

求める線分の長さ l は

$$l=2\sqrt{\frac{H}{1+1}}=2\sqrt{\frac{(1+1)\times2-1}{1+1}}=2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$$ ∎

§6. あとがき

この判別式 H をつかって生徒に解かせると，ほぼ全員が正解する。それは §1. で述べた展開，判別式の煩雑さを回避できるからである。もう一つは H の符号と D の符号が一致して，覚えやすいという点も正解に寄与している。

ただし，H から接点の座標を求めることはできるが，共有点の座標を求めることはできないという欠点がある。

最後に 2 円の共通接線も求めることができると思います。各自で試みてください。

(長崎県立大村工業高等学校)