三角関数に関するある等式について

―興味・関心を引くような教材開発をめざして―

仁平（にへい） 政一（まさかず）

§1. はじめに

「$\sin\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ」という問題は，三角関数の加法定理の簡単な演算問題として，たいていの教科書等に取り上げられている。

ところが，$\sin\frac{\pi}{18}$ の値となるとどうだろうか。教科書にはもちろんのこと，問題集にも取り上げられてないと思われる。それは，そのはずで，例えば $\theta=\frac{\pi}{18}$ とおくと，$3\theta=\frac{\pi}{6}$ となり，3倍角の公式を利用すると

$$8\sin^3\theta-6\sin\theta+1=0$$

という方程式が得られるが，この方程式を解くことは，高校の範囲では教育的ではないからである。

ところが，$\frac{\pi}{18}$，$\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{9}$ に関しては，次のような美しい等式が成り立つことが知られている（[1]）。

(1)　$4\sin\frac{\pi}{18}+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{18}=1$

(2)　$2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}+\tan\frac{\pi}{12}=1$

(3)　$4\sin\frac{\pi}{9}+\tan\frac{\pi}{9}=\sqrt{3}$

本稿では，最初に上記の等式の通常の証明方法（計算による証明）を紹介し，それらの（数学IIの三角関数における）教材としての価値について述べる。

次に，3つの等式を一度に導くことができ，しかも（数学Ｉの）三角比の教材になり得る新しい命題を与え，その図形的証明（図形を利用した証明）を与える。

最後に，証明に用いた図形を利用すれば，等式(2)は三角比に関する面白い教材にもなり得ることについても述べる。

§2. 等式の通常の証明方法と教材としての価値

ここでは，等式

$$4\sin\frac{\pi}{18}+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{18}=1$$

の通常の証明（すなわち計算による証明）について述べる。他の等式の場合も全く同様である。

$\theta=\frac{\pi}{18}$ とおくと，$3\theta=\frac{\pi}{6}$ だから，$2\theta=\frac{\pi}{6}-\theta$ となる。よって，

$$\sin 2\theta=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

ところで，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ であるから

$$2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

を得る。ここで，この等式の両辺を $\cos\theta\,(\neq 0)$ で割ることにより

$$4\sin\theta+\sqrt{3}\tan\theta=1$$

となり，$\theta=\frac{\pi}{18}$ であるから，求める等式が得られる（この証明は文献[1]による）。

証明のプロセスから分かるように，本質的には正弦の加法定理しか利用していない。しかも，単純に和積公式を用いて解けるような問題でもない。

生徒のレベルに合わせて適切に小問等を用意すれば，演習問題としての良問としての資格が十分にあると考える。また，$\sin\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{\pi}{18}$ 等のように，単独では答がきれいな形にならなかったり，あるいは求めることが困難であっても，等式として美しい形になる場合がある。このようなことを気づかせることも，教育的価値があると考える。

これを機会に，生徒達に他にもそのような場合があるかどうかを，例えばその最たるものとしての

$$\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{12}=1$$

や，2倍角の公式から得られる

$$4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=1$$

などを紹介して調べさせれば，三角関数に関する公式に対する見方や捉え方が深まり，単に公式を覚えて問題を解くという受け身の状態で学ぶときより，より三角関数に興味を持ってくれるのではないだろうか。

次に，3つの等式に関する新しい命題とその図形的証明の話に移ろう。

§3. 等式の図形的証明

まず，一般的な命題から出発しよう。

命題1　a，b，c は $a^2+b^2=c^2$ を満たす正の実数で，α は $\tan\alpha=\frac{b}{a}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす実数とし，n と p は $1\leqq p\leqq n$ を満たす任意の実数とする。このとき，次の等式が成り立つ。

$$a\sin\frac{p\alpha}{n}+c\sin\left(\left(1-\frac{p}{n}\right)\alpha\right)=b\cos\frac{p\alpha}{n}$$

証明　△ABCの辺の長さを AB$=c$，BC$=a$，CA$=b$ とする。このとき，仮定から ∠ABC$=\alpha$，∠BCA$=\frac{\pi}{2}$ である。

辺CA上に ∠CBD$=\frac{p\alpha}{n}$ となるように点Dをとる。次に，CD$=x$ とおく。このとき AD$=b-x$ である（図1参照）。

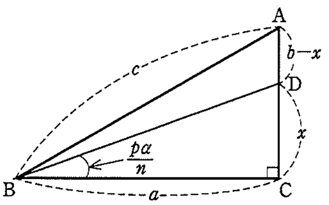

図1

△ABDに正弦定理を適用すると，

$$\frac{b-x}{\sin(\alpha-p\alpha/n)}=\frac{c}{\sin(\pi/2+p\alpha/n)}$$

となる。よって

$$b-x=\frac{c}{\cos(p\alpha/n)}\sin\left(\left(1-\frac{p}{n}\right)\alpha\right) \qquad ①$$

他方△CBDに注目すれば

$$x=a\tan\frac{p\alpha}{n} \qquad ②$$

が得られる。

①と②から，

$$b=\frac{c}{\cos(p\alpha/n)}\sin\left(\left(1-\frac{p}{n}\right)\alpha\right)+a\tan\frac{p\alpha}{n}$$

が得られる。したがって，

$$a\sin\frac{p\alpha}{n}+c\sin\left(\left(1-\frac{p}{n}\right)\alpha\right)=b\cos\frac{p\alpha}{n}$$

を得る。■

命題1は面積を利用するとより簡単に証明できる。

[別証]

図1の三角形において，BD$=y$ とおく。いま，面積に注目すれば

$$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{DBC}=\triangle\mathrm{ABC}$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}cy\sin\left(\left(1-\frac{p}{n}\right)\alpha\right)+\frac{1}{2}ay\sin\frac{p\alpha}{n}=\frac{1}{2}ab \qquad ③$$

が得られる。一方

$$\frac{a}{y}=\cos\frac{p\alpha}{n}$$

であるから

$$y=a/\cos\frac{p\alpha}{n} \qquad ④$$

を得る。④を③に代入して整理すれば

$$a^2\sin\frac{p\alpha}{n}+ca\sin\left(\left(1-\frac{p}{n}\right)\alpha\right)=ab\cos\frac{p\alpha}{n}$$

が得られ，この式の両辺を $a\,(\neq 0)$ で割れば求める結果が得られる。■

命題1の式で $p=1$，$n=3$ とすると，次の結果が得られる。

系2　$2c\sin\frac{\alpha}{3}+a\tan\frac{\alpha}{3}=b$

証明　命題1の式で $p=1$，$n=3$ とすると，

$$a\sin\frac{\alpha}{3}+c\sin\frac{2\alpha}{3}=b\cos\frac{\alpha}{3}$$

となる。ところで，$\sin\frac{2\alpha}{3}=2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}$ であるから，ただちに，求める結果が得られる。■

系2の式で $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$ とすると，冒頭の3つの等式がただちに得られる。

§4. 数学Iの教材として

ここでの命題1の証明は正弦定理，別証では面積の公式しか用いていない。（数学Iの）三角比の分野ではそれらはぜひ身につけさせたい事柄である。しかも問題としては新しい上，少なくとも数学Iの範

囲で2通りの方法で解くことができる。これらのことから考えて，命題1は三角比の教材としての価値を備えているように思われる。

さて，話を最初に述べた3つの等式に戻すと，等式(2)は三角比の教材としても取り上げることができる。次に，そのことについて考察しよう。

図1で $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$ とし，BD を ∠B の2等分とすれば，

$$2:\sqrt{3}=(1-\mathrm{CD}):\mathrm{CD}$$

が成り立つ。

この比例式から，CD の長さが求まるので，三平方の定理から，BD の長さも求まる。したがって，加法定理を知らなくても，

$$\sin\frac{\pi}{12},\ \tan\frac{\pi}{12}$$

の値が求められる。この結果を用いて等式(2)を示すことになる。問題として，面白みと深みがある。

また，∠B の2等分線による比を利用しなくても，命題1の別証と全く同様にして，面積を用いた方法で $\tan\frac{\pi}{12}$ を求めることができる。

この方法も，アイディアと $\tan\frac{\pi}{12}$ から $\sin\frac{\pi}{12}$ を求めるのにある程度の計算力を必要とする。

以上の理由から，等式(2)は三角比での面白い問題としての資格を持つのではないだろうか。

§5. 終わりに

実は，系2の等式は α が第2象限，3象限，4象限の角でも成り立つ。このことは，通常の証明の方法で，容易に示すことができる。

$\alpha=\frac{5\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{3}$ とすると，それぞれ

$$4\sin\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\tan\frac{5\pi}{18}=1,$$

$$2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}-\tan\frac{5\pi}{12}=-1,$$

$$4\sin\frac{5\pi}{9}+\tan\frac{5\pi}{9}=-\sqrt{3}$$

が得られる。

さらに，同様な式を次々と作ることができ楽しむことができる。

教師自身も数学を楽しむこと，それは生徒達が数学を好きになる原動力の1つになるのではないだろうか。

日々多くの事務処理，進路指導，生徒指導や特活指導等に追われる中で，なかなかそのような余裕は持てないけれども…。

《参考文献》

〔1〕 熊野充博「問題を一般化して考える」初等数学の会通信第31号 (2008.5.1) *pp*.6—8

(茨城大学非常勤講師 (元茨城県立藤代高等学校))