四角形・公孫樹形の方程式と
領域グラフの方程式について

佐々木　正敏（ささき　まさとし）

§1．はじめに

貝形，だるま形，三日月形や弓形などの方程式が円と円，あるいは円と直線の絶対値結合によって表されることは先に示した。また多角形の方程式が折れ線や直線の三日月形結合によって表せることも示した（ともに数研通信 67 号）。ここでは折り返しを利用した公孫樹形の方程式，対角線を利用した四角形の方程式を扱う。また領域の方程式表示を示す。

§2．四角形の方程式

高等学校で扱う多角形の方程式でもっともポピュラーなものは，図 1 に示す正方形を表す $|x|+|y|=1$ だろう。これは 2 つの折れ線

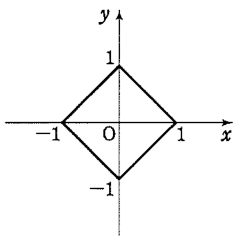
$|x|+y-1=0$,

$-|x|+y+1=0$

で囲まれた図形であるから，方程式は

$f=|x|+y-1$ と

$g=-|x|+y+1$



（図 1）

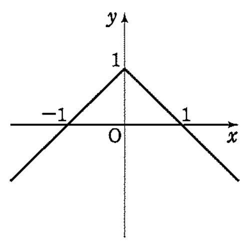
を三日月形結合 $|f+g|+f-g=0$ して得られる。実際

$$|(|x|+y-1)+(-|x|+y+1)|+(|x|+y-1)-(-|x|+y+1)=0$$

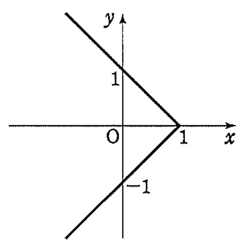
を整理して $|x|+|y|=1$ が得られる。

しかしこれとは別の見方もできる。ひとつは，$x+y=1$ において，x を $|x|$ で，y を $|y|$ で置き換えたものだという見方である。

$x+y=1$ は両切片が 1 の直線だが，$|x|+|y|=1$ のグラフは，この直線の第 1 象限部分をすべての象限に両軸で対称に折り返したものになっている。



（図 2）



（図 3）

$|x|+y=1$ のグラフは図 2 のようなグラフに，$x+|y|=1$ のグラフは図 3 のようなグラフになるが，方程式の中で x の代わりに $|x|$ とおくと，$x\geqq 0$ の部分と，その部分を y 軸で対称に折り返した部分との両方を合わせたグラフになる。y の代わりに $|y|$ とおいても同様のことがいえる。つまり，与えられた方程式 $f(x,\ y)=0$ に対して，$f(|x|,\ y)=0$ を作ると $f(x,\ y)=0$ の第 2 象限と第 3 象限部分のグラフが，第 1 象限と第 4 象限部分を y 軸で折り返したグラフで置き換えられる。また x と y を同時に $|x|$，$|y|$ で置き換えると，第 2，第 3，第 4 象限部分が第 1 象限部分を両軸を対称軸として折り返したグラフで置き換わる。

$|x|+|y|=1$ のグラフは，$x+|y|=1$ で x の代わりに $|x|$ とおいたもの，$|x|+y=1$ で y の代わりに $|y|$ とおいたもの，あるいは，$x+y=1$ で x と y を同時に $|x|$，$|y|$ で置き換えたものと考えることができるだろう。

このような置き換えを使うことで，ある象限部分に現れるグラフを x 軸や y 軸に関して対称に折り返して新しいグラフを作ることが可能になる。2 つの曲線で囲まれた閉曲線の方程式は基本的には 2 つの曲線の

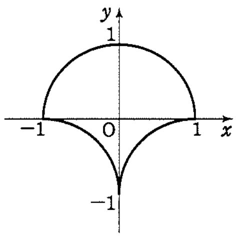
三日月形結合 $|f+g|+f-g=0$,

貝形結合 $f+g+|f-g|=0$,

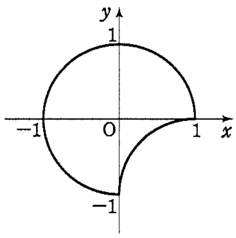
だるま形結合 $f+g-|f-g|=0$

のいずれかで与えられるが，ある象限部分を切り取って対称に折り返すという操作は，方程式を作る上で有効な手法のひとつではある。

[例１]　公孫樹形の方程式



（図４）



（図５）

図４の公孫樹形を表すには，図５の三日月形を作り，第１象限と第４象限部分を y 軸で折り返せばよい。この三日月形は外側円が $f=x^2+y^2-1=0$，内側円が $g=x^2+y^2-2x+2y+1=0$ であるから，方程式は

$$|(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-2x+2y+1)| \\ +(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-2x+2y+1)=0$$

整理して

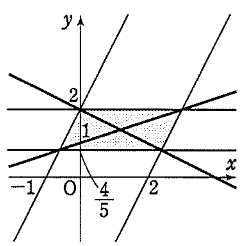
$$|x^2+y^2-x+y|+x-y-1=0$$

これを y 軸で折り返せばよいから，x の代わりに $|x|$ とおいて，求める方程式は

$$|x^2+y^2-|x|+y|+|x|-y-1=0$$

さて冒頭の正方形のもうひとつの見方は絶対値記号で挟まれた１次式部分について，（１次式）$=0$ とおいた方程式が正方形の対角線になっているという見方である。

例えば，適当な２直線 $x-3y+3=0$, $x+2y-4=0$ の１次式部分を絶対値記号を使って結合した方程式 $|x-3y+3|+|x+2y-4|=3$ を作ると，この方程式は図６網掛け外周のような平行四辺形を表す。最初に与えた２直線（図６太線）が対角線になっていることが分かる。



（図６）

このように，交わる２直線の１次式部分を絶対値記号を用いて結合すると平行四辺形が得られる。$|x|+|y|=1$ は，対角線が直交するからひし形（正方形はひし形の特別な形）を表す。

しかし絶対値記号で挟まれた２直線を対角線と捉える考え方は，実は本質的な見方ではない。絶対値記号で挟まれた１次式が２つあるということは，第一義的には平面が４つの領域に分けられることを意味している。交わる２直線によって平面は４つの領域に分割され，そのそれぞれの領域で直線（線分）が与えられ，かつそれらの直線（線分）がつながっているので，見た目には領域の境界線が四角形の対角線に見えただけと考えるべきだろう。

したがって，２本の対角線

$$ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0$$

を使った平行四辺形を与える方程式

$$p|ax+by+c|+q|a'x+b'y+c'|=r$$

（p，q，r は定数）において，定数 $-r$ を x，y の１次式 $lx+my+n$ に置き換えれば，一般の四角形を表すことができる。

この方程式

$$p|ax+by+c|+q|a'x+b'y+c'|+lx+my+n=0$$

では２直線で分けられた４つの領域ごとに１つの直線（線分）が対応するから，必ず凸四角形になる。これを変形して（α，β，γ，δ，k を定数とする）

$$\alpha|ax+by+c|+\beta(ax+by+c) \\ +\gamma|a'x+b'y+c'|+\delta(a'x+b'y+c')=k$$

という形にすれば，４頂点の座標を代入したとき２項が０になるから簡単に係数を決定でき，運用上も使いやすいだろう。

[例２]　四角形の方程式

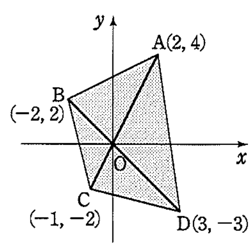
図７の網掛け外周の四角形の方程式を求める。対角線は $2x-y=0$，$x+y=0$ であるから求める方程式は α，β，γ，δ，k を定数として

$$\alpha|2x-y|+\beta(2x-y)+\gamma|x+y|+\delta(x+y)=k$$

とおける。この方程式に４頂点A$(2,\ 4)$，B$(-2,\ 2)$，C$(-1,\ -2)$，D$(3,\ -3)$ を代入して

α，β，γ，δ，k

を決めればよい。



（図７）

$$\alpha=\frac{5}{36}k,\quad \beta=-\frac{1}{36}k,$$

$$\gamma=\frac{1}{4}k,\quad \delta=-\frac{1}{12}k$$

より $k=36$ とおいて求める方程式は，

$$5|2x-y|+9|x+y|-5x-2y=36$$

§3. 領域を表す方程式

絶対値記号を利用した結合で様々な図形を表すことが可能となったが，次に方程式で領域を表すことを考える。

互いに平行ではなく，3本が同一点では交わらない3本の直線同士を，絶対値記号を用いて結合した方程式を作ると，定数の選び方によってはある領域全体を表す場合がある。

例えば p，q，r，k を定数として，

$p|y+x-2|+q|y-2x-2|+r|y-x|=k$ ……①

とおく。連立不等式

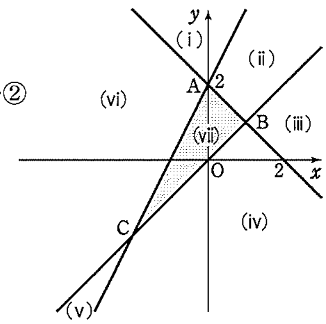
$$\left.\begin{array}{l} y\leqq -x+2 \\ y\leqq 2x+2 \\ y\geqq x \end{array}\right\}\cdots\cdots②$$

は図8の三角形の内部の領域を表すが，このとき①は

$-p(y+x-2)$

$-q(y-2x-2)$

$+r(y-x)=k$



（図8）

となるから，整理して

$(-p+2q-r)x+(-p-q+r)y+(2p+2q)=k$

したがって，

$-p+2q-r=0$

$-p-q+r=0$

$2p+2q=k$

を満たすように p，q，r，k を定めると，方程式①は連立不等式②の領域を表すことになる。つまり図8の網掛けの三角形の外周とその内部を表すことになる。実際，$p=1, q=2, r=3, k=6$ とおくと，方程式①は $|y+x-2|+2|y-2x-2|+3|y-x|=6$ …③となり，連立不等式②の領域で成立する。

以下確認しよう。

(i) $y\geqq -x+2$，$y\geqq 2x+2$，$y\geqq x$ のとき

$6y-6x-6=6$ より $y=x+2$

この領域内にある直線上の点は A(0, 2) のみ

(ii) $y\geqq -x+2$，$y\leqq 2x+2$，$y\geqq x$ のとき

$2y+2x+2=6$ より $y=-x+2$

これを満たすのは辺 AB 上の点

(iii) $y\geqq -x+2$，$y\leqq 2x+2$，$y\leqq x$ のとき

$-4y+8x+2=6$ より $y=2x-1$

この領域内にある直線上の点は B(1, 1) のみ

(iv) $y\leqq -x+2$，$y\leqq 2x+2$，$y\leqq x$ のとき

$-6y+6x+6=6$ より $y=x$

これを満たすのは辺 CB 上の点

(v) $y\leqq -x+2$，$y\geqq 2x+2$，$y\leqq x$ のとき

$-2y-2x-2=6$ より $y=-x-4$

この領域内にある直線上の点は C(−2, −2) のみ

(vi) $y\leqq -x+2$，$y\geqq 2x+2$，$y\geqq x$ のとき

$4y-8x-2=6$ より $y=2x+2$

これを満たすのは辺 CA 上の点

(vii) $y\leqq -x+2$，$y\leqq 2x+2$，$y\geqq x$ のとき

方程式③は （左辺）=6，（右辺）=6 となるので，この領域で成立する。すなわち△ABC の内部及び周上の点を表す。

(i)～(vii)により，方程式③は三角形の内部及び周上の点を表すことが分かる。

方程式で領域を表すこのタイプのグラフを領域グラフと呼ぶことにする。

§4. 領域グラフの成り立ちといくつかの例

領域グラフの仕組みは次のように説明できる。方程式 $|f|+g=0$ で，$g=f$ とおくと，この方程式は $f=0$ と f の負領域を表す。なぜなら $|f|+f=0$ とおくと，$f\geqq 0$ のとき $f=0$，$f\leqq 0$ のとき（左辺）=0，（右辺）=0 となり常に等式が成り立つからである。

正領域であれば $|f|-f=0$ とおけばよいだろう。

例えば $|x^2+y^2-1|+(x^2+y^2-1)=0$ を作ると，不等式 $x^2+y^2-1\leqq 0$ と同じ領域を表す。

$|x^2+y^2-1|-(x^2+y^2-1)=0$ なら円周と円の外側の領域 $x^2+y^2-1\geqq 0$ になる。

3つの1次式を絶対値記号で結合した方程式③はこれを3つ結合したものと考えることができる。すなわち p，q，r を定数とするとき，

$p(|f_1|+f_1)+q(|f_2|+f_2)+r(|f_3|+f_3)=0$ は

$|f_1|+f_1=0$,

$|f_2|+f_2=0$,

$|f_3|+f_3=0$

の表す3つの領域，つまりそれぞれの負領域の共通部分になるわけである。

この領域グラフを利用することで領域を方程式で表すことができるようになる。

［例3］ 同心円で囲まれた領域の方程式

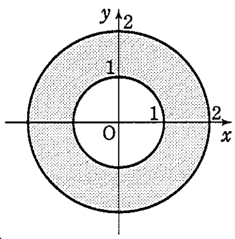
例えば，$|f|+f+|g|-g=0$ を作ると2つの閉曲

線 f の負領域と g の正領域の共通部分を表すから，$f \geqq g$ のときは，2つの曲線 $f=0$ と $g=0$ で挟まれる領域を表すグラフになる。

図9の網掛けの領域は同心円

$$x^2+y^2-1=0,$$
$$x^2+y^2-4=0$$

で挟まれたドーナツ形の領域だが，



(図9)

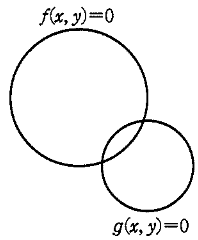
$$|x^2+y^2-4|+(x^2+y^2-4)+|x^2+y^2-1|-(x^2+y^2-1)=0$$

すなわち，$|x^2+y^2-1|+|x^2+y^2-4|=3$

で与えられる。

これは三日月形，貝形，だるま形や弓形で囲まれた領域にも敷衍できる。

図10のような交わる2円 $f=0$ と $g=0$ があるとき(以下いずれも円の内部を負領域，外部を正領域とする。)，$f=0$ を外側円，$g=0$ を内側円とする三日月形の周及び内部の方程式は，



(図10)

$$(|f|+f)+(|g|-g)=0$$

すなわち $|f|+|g|+f-g=0$ で与えられる。

外側円と内側円を入れ替えた三日月形の周及び内部の方程式は

$(|f|-f)+(|g|+g)=0$ より $|f|+|g|-f+g=0$

になる。貝形の周及び内部の方程式は

$(|f|+f)+(|g|+g)=0$ より $|f|+|g|+f+g=0$

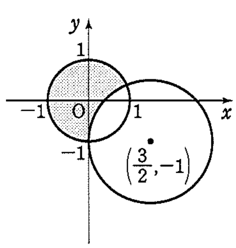
で，だるま形であれば

$$(|f|+f)\cdot(|g|+g)=0$$

で与えられる。

[例4] 三日月，貝形，だるま形で囲まれる領域の方程式

図11の網掛けの領域は，外側円が $f=x^2+y^2-1=0$，内側円が $g=x^2+y^2-3x+2y+1=0$ の三日月形で囲まれる領域であるから，その方程式は



(図11)

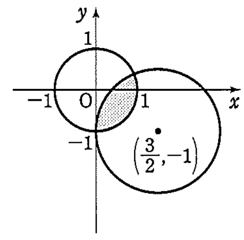
$$|x^2+y^2-1|+(x^2+y^2-1)+|x^2+y^2-3x+2y+1|-(x^2+y^2-3x+2y+1)=0$$

すなわち

$$|x^2+y^2-1|+|x^2+y^2-3x+2y+1|+3x-2y-2=0$$

で与えられる。

図12のように同じ2円で囲まれる貝形の領域の方程式は



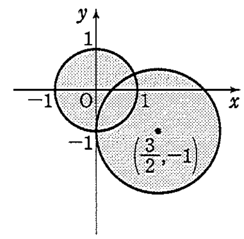
(図12)

$$|x^2+y^2-1|+(x^2+y^2-1)+|x^2+y^2-3x+2y+1|+(x^2+y^2-3x+2y+1)=0$$

より

$$|x^2+y^2-1|+|x^2+y^2-3x+2y+1|+2x^2+2y^2-3x+2y=0$$

同様にだるま形で囲まれる領域(図13)の方程式は



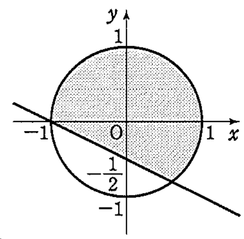
(図13)

$$(|x^2+y^2-1|+x^2+y^2-1)\times(|x^2+y^2-3x+2y+1|+x^2+y^2-3x+2y+1)=0$$

で与えられる。

[例5] 弓形で囲まれる領域の方程式

図14の弓形は，単位円 $x^2+y^2-1=0$ と直線 $x+2y+1=0$ で囲まれた領域で，x^2+y^2-1 の負領域と，$x+2y+1$ の正領域の共通部分になるから，求める領域の方程式は



(図14)

$$|x^2+y^2-1|+(x^2+y^2-1)+|x+2y+1|-(x+2y+1)=0$$

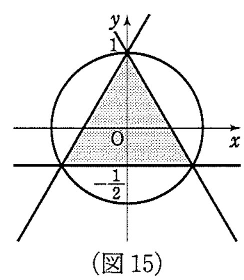
整理して

$$|x^2+y^2-1|+|x+2y+1|+x^2+y^2-x-2y-2=0$$

[例6] 正多角形で囲まれた領域の方程式

単位円に内接するいくつかの正多角形の領域グラフの方程式を列挙する。

図15のような正三角形だが，3辺の直線の方程式を利用する場合は，



(図15)

$y-\sqrt{3}x-1$ の負領域，
$y+\sqrt{3}x-1$ の負領域，
$2y+1$ の正領域

の共通部分であるから

$$|y-\sqrt{3}x-1|+(y-\sqrt{3}x-1)+|y+\sqrt{3}x-1|+(y+\sqrt{3}x-1)+|2y+1|-(2y+1)=0$$

すなわち

$$|\sqrt{3}x-y+1|+|\sqrt{3}x+y-1|+|2y+1|=3$$

で与えられる。折れ線　$y+\sqrt{3}|x|-1=0$ と直線 $2y+1=0$ を利用する場合は，$y+\sqrt{3}|x|-1$ の負領域と $2y+1$ の正領域の共通部分であるから

$$|y+\sqrt{3}|x|-1|+(y+\sqrt{3}|x|-1)$$
$$+\left|y+\frac{1}{2}\right|-\left(y+\frac{1}{2}\right)=0$$

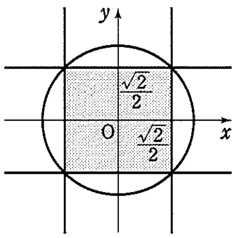
を整理して

$$|2\sqrt{3}|x|+2y-2|+2\sqrt{3}|x|+|2y+1|=3$$

になる。

次に各辺が軸と平行な正方形(図16)だが，4 辺の直線の方程式を利用すると

$$|\sqrt{2}x+1|-(\sqrt{2}x+1)$$
$$+|\sqrt{2}y-1|+(\sqrt{2}y-1)$$
$$+|\sqrt{2}x-1|+(\sqrt{2}x-1)$$
$$+|\sqrt{2}y+1|-(\sqrt{2}y+1)=0$$



(図 16)

整理して

$$|\sqrt{2}x+1|+|\sqrt{2}y-1|+|\sqrt{2}x-1|+|\sqrt{2}y+1|=4$$

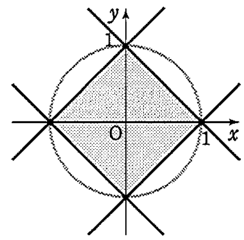
になるだろう。また対角線が軸と一致する場合の正方形の領域グラフ(図17)の方程式は，4 辺の直線の方程式を利用するときは

$$|y-x-1|+(y-x-1)$$
$$+|y+x-1|+(y+x-1)$$
$$+|y-x+1|-(y-x+1)$$
$$+|y+x+1|-(y+x+1)=0$$

より

$$|x-y+1|+|x+y-1|$$
$$+|x-y-1|+|x+y+1|=4$$

になる。



(図 17)

冒頭の正方形の方程式 $|x|+|y|=1$ を利用して，

$$||x|+|y|-1|+|x|+|y|-1=0$$

と表すこともできよう。

(東京都立日野台高等学校)