既約なピタゴラス数の一般解の再考と $a_n{}^2+b_n{}^2=c_n{}^2$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ について

―生徒の発見からヒントを得て―

村井　靖雄（むらい　やすお）

§1. 概要

同僚の先生が，「3，4，5や5，12，13などの各辺が自然数の直角三角形は知っていると思いますが，その他に知っていたら教えてください。」と授業の合間に言ったそうです。

すると，しばらくしてある生徒が規則性を発見したと，教えてくれたそうです。その一連の解が，3，4，5から始まる以下の数列です。

3，4，5
5，12，13
7，24，25
9，40，41
11，60，61
…

具体的な自然数解（ピタゴラス数）をこれほどまで計算してくるとは，とても驚いたと言っていました。

同僚の先生はその後，上の一連のピタゴラス数から数列の一般解を求めることを，数学Bの時間に数学的帰納法の一例として紹介しました。

上に書いた自然数解の列を縦に読み取った数列 $\{a_n\}$：3，5，7，… は等差数列であり，数列 $\{b_n\}$：4，12，24，… は階差数列から一般項が求まり，数列 $\{c_n\}$：5，13，25，… は4，12，24，… に1を加えたものであるので，一般項

$$a_n=2n+1,\quad b_n=2n(n+1),\quad c_n=2n(n+1)+1 \tag{1}$$

が予測でき，a_n，b_n，c_n がピタゴラス数であることを確かめることができます。

具体的なピタゴラス数の計算から数列を予測し，数列(1)を求めることは，数学には実験科学の側面があることを示すいい例だと思います。

ピタゴラス数の一般解といえば，大学時代の講義で聞いた次の一般解：

$$a=m^2-n^2,\quad b=2mn,\quad c=m^2+n^2 \tag{2}$$

しか知りませんでした。この解は，m と n が互いに素で同時に奇数でないとき，既約な解となります。

ここでは，ピタゴラス数の計算例から帰納的に導かれた一般解(1)が2変数で表されるピタゴラス数の一般解(2)の既約な特殊解であることを示し，さらに，ピタゴラス数を生成するその他の数列の興味深い性質について紹介していきます。

§2. 既約なピタゴラス数の一般解の再証明

まず最初に，2変数で表されるピタゴラス数の一般解の証明をします。

この定理は，traditional なもので「…ということが知られている」として紹介されていることが多いと思われます。例えば，参考文献〔1〕には結果のみ紹介されています。

既知の定理なので証明を省略したいところですが，後の議論で証明の考え方が必要になってくるので，自分なりに証明したものを紹介します。

なお，ここで出てくる変数はすべて整数であるものとし，関数 $f(n)$ の値域が自然数であるように，n の定義域が調整されるものとします。例えば，$n=2k+1$ とおくと，n は自然数の奇数1，3，5，… が表されるので，k の定義域は，0，1，2，… です。ただし，定義域を明示的に指定する場合は，$n\geqq 3$ などとして断り書きします。

最初に，準備をしておきます。

> **命題1**　$a^2+b^2=c^2$ を満たすとする。このとき，a，b は同時に奇数ではない。

証明　a，b が同時に奇数であるとする。

よって，$a=2k+1$，$b=2l+1$ とおける。

このとき，$a^2+b^2=4(k^2+k+l^2+l)+2$ となる。

ところで，$c=4m$，$4m\pm1$，$4m+2$ のそれぞれにおいて，

$$c^2=16m^2=4(4m^2),$$
$$c^2=16m^2\pm8m+1=4(4m^2\pm2m)+1,$$
$$c^2=16m^2+16m+4=4(4m^2+4m+1)$$

であるから，自然数の平方数は，4で割った余りが0または1である。a^2+b^2 は4で割って2余るから，不合理である。よって，a，b は同時に奇数ではない。■

それでは，既約なピタゴラス数の一般解を証明します。なるべくはっきりさせたいので，必要性の証明と十分性の証明を分けて証明したいと思います。

> **定理1**　（既約なピタゴラス数の一般解）
> $a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数 a，b，c が既約であるための必要十分条件は，互いに素で，かつ，同時に奇数でない自然数 m，n を用いて，
> $$a=m^2-n^2,\quad b=2mn,\quad c=m^2+n^2 \tag{3}$$
> と表されることである。

証明　$a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数 a，b，c が既約であるとする。

命題1から，a，b は同時に奇数ではない。

したがって，b を偶数としてよい。

このとき，$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ であるから，$c+a=s$，$c-a=t$ とおく。$c=\dfrac{s+t}{2}$，$a=\dfrac{s-t}{2}$ であるから，$s+t$，$s-t$は偶数である。

よって，s と t は両方とも偶数または奇数でなければならない。ところが，b は偶数であるから，s と t は両方とも偶数である。

したがって，$s=2k$，$t=2l$ と表せるので，$b^2=4kl$ である。ここでkとlは互いに素でなければならない。なぜなら，互いに素でなかったとすると，$k=dk'$，$l=dl'$ として，$a=\dfrac{s-t}{2}=d(k'-l')$，$b=\sqrt{4d^2k'l'}=2d\sqrt{k'l'}$，$c=\dfrac{s+t}{2}=d(k'+l')$ であるから，共通因数dが存在し，a，b，c が既約であることに反する。

$b=2\sqrt{kl}$ であるから，kl は平方数である。よって，kl の素因数分解に現れる素数の指数はすべて偶数である。ところが，k と l は互いに素であったから，k，l も平方数である。よって，$m=\sqrt{k}$，$n=\sqrt{l}$ とおいて，$b=2mn$ と表せる。ここで，k と l が互いに素であるから，m と n も互いに素である。

このとき，$a=\dfrac{s-t}{2}=\dfrac{2k-2l}{2}=k-l=m^2-n^2$，$c=\dfrac{s+t}{2}=k+l=m^2+n^2$ となる。

さらに，もし，m，n が同時に奇数であったとすると，a，b，c すべて偶数になるので，既約ではなくなってしまう。したがって，m，n は同時に奇数ではない。これで必要性の証明は終わった。

逆に，互いに素で，かつ，同時に奇数ではない m，n を用いて，$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$ とおく。このとき，$a^2+b^2=c^2$ を満たすことは容易に確かめられる。さらに，a，b，c が既約であることを示せば，証明が終わる。

mが偶数で n が奇数であるとする。このとき，$2m$，n は互いに素である。$2m$，n を素因数分解したときに現れる素数の集合をそれぞれ $P=\{p|p$ は $2m$ の素因数$\}$，$Q=\{q|q$ は n の素因数$\}$ であるとする。$2m$ と n は互いに素であるから，$P\cap Q=\phi$ である。$b=2mn$ であるから，b の素因数の集合は $P\cup Q$ である。よって，すべての $p\in P\cup Q$ について，素数 p が a，b，c の共通の素因数ではないことを調べていけばよい。

$p\in P$ とすると $p\notin Q$ であるから，$m=kp$，$n=lp+r$，$0<r<p$ と表せる。よって，$a=m^2-n^2=p(k^2p-l^2p-2lr)-r^2$ である。したがって，aを p で割った余りは，$-r^2$ を p で割った余りに等しい。ところが，$-r^2$ を p で割ることができるとすると，r も p で割ることができる。すなわち，$r\geqq p$ となり，$0<r<p$ であることに矛盾する。よって，$-r^2$ を p で割った余りは0ではない。すなわち，a を p で割りきることができない。$c=m^2+n^2$ についても同様に，c を p で割りきることができない。よって，p は a，b，c の共通因数ではない。

$q\in Q$ についても同様に，q は a，b，c の共通因数ではないことがわかる。

mが奇数で，nが偶数であるときは，上の議論において $P=\{p|p$ は mの素因数$\}$，$Q=\{q|q$ は $2n$ の素因数$\}$ であるとして，同様に $p\in P$，$q\in Q$ は a，b，c の共通因数ではないことがわかる。

よって，a，b，c は既約である。これで十分性の証明も終わったので，定理が証明された。 ∎

証明をしてみると，素因数分解の一意性がいかに重要であるかがわかります。

必要性の証明の突破口は，b^2 を積 $(c-a)(c+a)$ で表すことであり，十分性の証明の突破口は，b の一般解 $2mn$ の素因数分解を考えることです。

必要性，十分性のいずれの証明においても，数を積で表し，その数の素因数分解を考えることにより，証明が展開していきます。

2次方程式の解の公式を導いたり，軌跡の方程式を導くときは，通常は必要性のみ詳しく計算をし，十分性については「逆をたどれば」とか「逆も成り立つ」などとして終わらせてしまうことが多いかもしれません。

十分性の証明をまじめに考えることで，さらに理解が深まるのではないかと思います。

§3. 数列で表現される既約なピタゴラス数

生徒が発見した一連のピタゴラス数は，定理1から眺めれば，次の命題がもとになっていることがわかります。

命題2 既約な自然数 a，b，c が，$a^2+b^2=c^2$ なる関係式を満たすとし，b を偶数とする。このとき，$c-b$ は奇数の平方数でなければならない。

証明 定理1より，

$$c-b=(m^2+n^2)-2mn=(m-n)^2$$

ここで，m，n は同時に奇数でないから，$m-n$ は奇数でなければならない。

よって，$(m-n)^2$ は奇数でなければならない。 ∎

冒頭で紹介した生徒の発見した一連のピタゴラス数は，b が偶数で $c-b=1^2$ であることがわかります。

したがって，自然に $c-b=3^2$，$c-b=5^2$，$c-b=7^2$，…… を満たす既約なピタゴラス数はどうやって計算すればよいのか？という疑問が頭をもたげてきます。

ちょっと厄介なのが，命題2の逆は成り立たないということです。例えば，$a=27$，$b=36$，$c=45$ はピタゴラス数で，$c-b=3^2$ を満たしますが，既約ではありません。

結局，次の命題にたどり着きました。

命題3 $k\geqq 0$ を定数として

$$a_n=(2k+1)(2n+2k+1),$$
$$b_n=2n(n+2k+1),$$
$$c_n=2n(n+2k+1)+(2k+1)^2 \qquad (4)$$

とおくと，a_n，b_n，c_n はピタゴラス数である。また，$2k+1$ と互いに素なすべての n に対して，a_n，b_n，c_n は既約なピタゴラス数となる。

特に $k=0$ のときは，すべての n において，a_n，b_n，c_n は既約なピタゴラス数となる。

証明 まず，$k=0$ のときについて証明する。

$m=n+1$ とおく。このとき，m と n は同時に奇数でないことは明らかである。

n の素因数分解に現れる有限個の素数を p_1，…，p_i，…，p_l であるとする。このとき，$m=n+1=p_ik+1$ と表せるので，m を n の素因数分解に現れるどの素数で割っても1余る。よって，m と n は互いに素である。したがって，定理1より

$a_n=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$,

$b_n=2mn=2n(n+1)$,

$c_n=m^2+n^2=(n+1)^2+(n+1)=2n(n+1)+1$

は，既約なピタゴラス数となる。

次に，$m=n+2k+1$ とおく。このとき，n が偶数のとき m は奇数，n が奇数のとき m は偶数であるから，m，n は同時に奇数でない。

n が $2k+1$ と互いに素であるとする。よって，n の素因数 p について，$n=ip$，$2k+1=jp+r$ $(0<r<p)$ と表される。よって，$m=(i+j)p+r$ であるから，m を p で割りきることができない。よって，m と n は互いに素である。

逆に，m と n が互いに素であるとする。n の素因数 p について，$n=ip$，$n+2k+1=jp+r$ $(0<r<p)$ と表される。よって，$n+2k+1=ip+2k+1=jp+r$，すなわち，$2k+1=(j-i)p+r$ となる。よって，$2k+1$ を p で割りきることができない。よって，n と $2k+1$ は互いに素である。

以上のことから，$m=n+2k+1$ と n が互いに素であることと，n と $2k+1$ が互いに素であることは

同値であることがわかる。

このとき，定理1の式(3)のmに $n+2k+1$ を代入すれば，

$$a_n=m^2-n^2=(n+2k+1)^2-n^2$$
$$=(2k+1)(2n+2k+1),$$
$$b_n=2mn=2n(n+2k+1),$$
$$c_n=2n(n+2k+1)+(2k+1)^2$$

であり，mとnは同時に奇数でなく，互いに素であるから，a_n，b_n，c_n は既約となる。 ∎

これで，生徒が発見した一連のピタゴラス数(1)は，命題3の数列(4)において，$k=0$ とした式であることが示されました。

§4. 命題3から導かれる系について

命題3において，kに0，1，2，3，4，… と代入していくと，a_n，b_n，c_n がピタゴラス数となる数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が次々に得られます。kの値によって，違う世界のピタゴラス数が出てくるようです。

特に $2k+1$ が素数であるときは，生成されるピタゴラス数には興味深い性質があります。

次のような系が成り立ちます。

系1　$p\neq 2$ を素数とする。このとき，

$$a_n=p(2n+p),\quad b_n=2n(n+p)$$
$$c_n=2n(n+p)+p^2$$

はnがpの倍数でないときは，既約なピタゴラス数であり，nがpの倍数であるときは，$\frac{a_n}{p^2}$，$\frac{b_n}{p^2}$，$\frac{c_n}{p^2}$ が既約なピタゴラス数となる。さらに既約なピタゴラス数を生成する数列(1)

$A_n=2n+1$，$B_n=2n(n+1)$，$C_n=2n(n+1)+1$

を用いると

$$\frac{a_n}{p^2}=A_{\frac{n}{p}},\quad \frac{b_n}{p^2}=B_{\frac{n}{p}},\quad \frac{c_n}{p^2}=B_{\frac{n}{p}} \qquad (5)$$

が成り立つ。

証明　nがpの倍数でないときは，nとpは互いに素である。よって，命題3より a_n，b_n，c_n は既約なピタゴラス数となる。nがpの倍数であるときは，$n=kp$ とおける。よって，$a_n=p^2(2k+1)$，$b_n=p^2\cdot 2k(k+1)$，$c_n=p^2\{2k(k+1)+1\}$ であるから，各等式の両辺を p^2 で割り，$k=\frac{n}{p}$ とおけば，(5)が成り立つ。 ∎

§5. 具体的な計算例

それでは実際に，命題3のkにいろいろな値を代入して具体的に計算してみることにします。

まず，有名な十進BASIC
(http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/) でプログラムを組んでみましょう。

```
FUNCTION gcd(a,b)
  IF b=0 THEN
    LET gcd=a
  ELSE
    LET gcd=gcd(b,MOD(a,b))
  END IF
END FUNCTION
INPUT k
INPUT max
FOR n=1 TO max
  LET a=(2*k+1)*(2*n+2*k+1)
  LET b=2*n*(n+2*k+1)
  LET c=b+(2*k+1)^2
  PRINT n;",";a;",";b;",";c;
  LET g=gcd(gcd(a,b),c)
  IF gcd(gcd(a,b),c)=1 THEN
    PRINT
  ELSE
    PRINT  "==>";a/g;",";b/g;",";c/g
  END IF
NEXT n
END
```

上記のような簡単なプログラムで，既約なピタゴラス数を生成させることができます。

まず，命題3において，$k=0$，3 のときのピタゴラス数を第10項まで計算してみます。

$k=0$ のときは $c_n-b_n=1^2$

$k=3$ のときは $c_n-b_n=7^2$

となります。

計算結果は次の通りです。

（表１） $c_n - b_n = 1^2$ を満たすピタゴラス数

n	a_n	b_n	c_n
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
8	17	144	145
9	19	180	181
10	21	220	221

生徒が発見した一連のピタゴラス数は，上の表１になります。

（表２） $c_n - b_n = 7^2$ を満たすピタゴラス数

n	a_n	b_n	c_n	既約な解		
1	63	16	65			
2	77	36	85			
3	91	60	109			
4	105	88	137			
5	119	120	169			
6	133	156	205			
7	147	196	245	3	4	5
8	161	240	289			
9	175	288	337			
10	189	340	389			
11	203	396	445			
12	217	456	505			
13	231	520	569			
14	245	588	637	5	12	13

表２は系１で，$p=7$ のときのものです。７つおきに既約でないピタゴラス数が現れ，その既約なピタゴラス数は，表１に現れています。

この２つの表を見ていると，既約なピタゴラス数 (3，4，5) と (5，12，13) の間に，既約なピタゴラス数 (161，240，289)，…，(231，520，569) が顔を出すかのようです。このあたりの性質については，詳しく調べてみると面白いことが見つかるかもしれません。

さらに，$c_n - b_n = 105^2 = (3 \cdot 5 \cdot 7)^2$ を満たすピタゴラス数を計算してみます。命題３において，$k=52$ のときです。表３をみるとわかるように，3，5，7 と互いに素でない n の値のときに，既約でないピタゴラス数が現れているのがわかります。

（表３） $c_n - b_n = 105^2$ を満たすピタゴラス数

n	a_n	b_n	c_n	既約な解		
1	11235	212	11237			
2	11445	428	11453			
3	11655	648	11673	1295	72	1297
4	11865	872	11897			
5	12075	1100	12125	483	44	485
6	12285	1332	12357	1365	148	1373
7	12495	1568	12593	255	32	257
8	12705	1808	12833			
9	12915	2052	13077	1435	228	1453
10	13125	2300	13325	525	92	533

表３において，$n=5$ のときの既約な解 (483，44，485) は，$c_n - b_n = 21^2$ を満たすピタゴラス数 $a=21(2n+21)$，$b=2n(n+21)$，$c=2n(n+21)+21^2$ の最初のピタゴラス数です。

$2k+1$ が素数でないとき，既約でないピタゴラス数の既約な解は，複数の（表１だけでなく）別の世界のピタゴラス数の既約な解が混ざっているといえるでしょう。

§6. 終わりに

命題３さえあれば，いくらでも欲しいだけ生成することができます。

個人的には系１が興味深い性質で，ここにも素数の面白さが表れていると思います。系１において $p=101$ とすると，100 個の既約なピタゴラス数をコンピュータで一気に計算することができます。これらのピタゴラス数は，(10403，204，10405) からスタートして，(30401，40200，50401) で終わる 100 個の既約なピタゴラス数です。

最後に，今回の記事の執筆にあたって，一連のピタゴラス数を発見したスポーツ科学科２年の佐藤智希さんとそのことを私に教えてくれた松本玄先生に感謝いたします。

《参考文献》

〔１〕 宮原　繁「20. 整数」改訂版 科学新興社モノグラフ p.43，p.90

（宮城県　利府高等学校）