$R \geqq 2r$ の簡単な証明

大塚(おおつか)　秀幸(ひでゆき)

§1. はじめに

まず，2006年の京都大学理系（後期）の入試問題を見てみよう。

> （問題）　平面上の点Oを中心とし，半径1の円周上に相異なる3点A，B，Cがある。△ABCの内接円の半径rは$\frac{1}{2}$以下であることを示せ。

言い換えると，次のような命題になる。

> （命題）　△ABCの内接円の半径をr，外接円の半径をRとするとき　$R \geqq 2r$

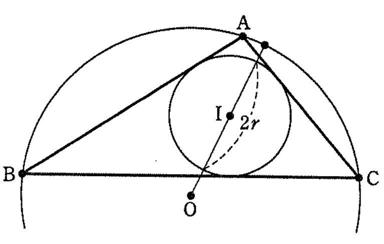
この命題は初等幾何では基本的な事実ではあるが，制限時間内で論証するとなるとかなり難しいと思う。この問題は見た目は質素であるが，本質的に異なる攻め方がいろいろとあり，難問であると同時に良問であるともいえる。本稿では，独自に考えた解法を紹介しよう。

§2. オリジナルの証明

できるだけ三角関数に頼らない方法こそが初等幾何の解法としてはエレガントであると私は考えている。なぜならば，図をあまり強く意識せず機械的な式変形に頼りすぎ，その結果証明されても，本質が理解できていないような気がしてならないからだ。ここでは，図形から得られる簡単な性質から本テーマの証明を試みる。

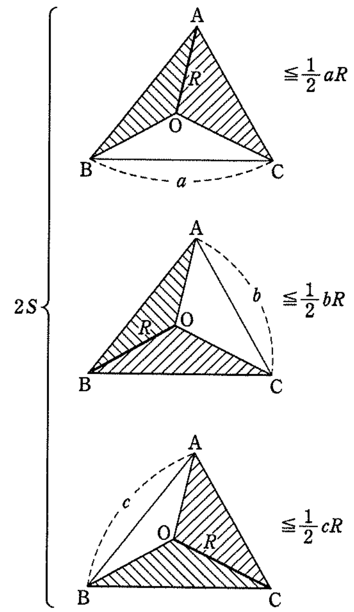
（証明）　△ABCの外心をO，内心をI，面積をSとする。

〈直角三角形または鈍角三角形のとき〉



上の図より　$R > 2r$

〈鋭角三角形のとき〉



このことに注意すると

$$ra + rb + rc = 2S \leqq \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}bR + \frac{1}{2}cR$$

$$2r(a+b+c) \leqq R(a+b+c)$$

$$\therefore \quad R \geqq 2r$$

■

§3. おわりに

はじめに述べた通り，この問題の解法はいろいろとあるが，本稿では中学生でも理解できる程度の幾何的なアプローチを試みた。その他には，「三角関数を駆使したもの」などが知られているが，比較してみるのも面白い。数学の基本的な定理の中には，三平方の定理のように非常にたくさんの証明が作られたものもある。これは，アプローチに執着するこの学問の姿勢があるからだろう。

（東京都元文教大学付属高等学校）