フィボナッチ数列と組合せについて

細田（ほそだ）　明良（あきよし）

§1. はじめに

「数学B」の教材である漸化式を作る指導において，以下に示す例を考えてみました。その漸化式がフィボナッチ数列になり，また，その第n項を組合せを使って表すことができる考え方も「数学A」の教材なので，併せて探求することにしました。

§2. フィボナッチ数列について

【問題1】

○，×をいくつか1列に並べる。ただし，×が2つ以上続かないものとする。そのとき，並べ方の総数をF_nとする。F_nをF_{n-1}とF_{n-2}を使って表せ。

【解答】

はじめに，並べ方の総数をf_Nとする。

(例)　$N=1$　○　×　$f_1=2$

$N=2$　○○　○×　×○　$f_2=3$

$N=3$　○○○　○○×　○×○　×○○　×○×　$f_3=5$

⋮

そこで，$N+2=n$ とし，$f_{N+2}=F_n$ ($n\geqq 3$) とする。最後が○か○×で終了すれば，×が2つ以上続くことはないことに気をつける。

例えば $F_6=8$ の並べ方は

○○○○　×○○○　×○×○　○○×○　○×○○ ……①

○○○×　○×○×　×○○×　……②

①は最後が○で終わればよく，その前までは

F_{n-1}　| F_{n-1} | ○ |

②は最後が○×で終わればよく，その前までは

F_{n-2}　| F_{n-2} | ○ | × |

$F_1=1$，$F_2=1$ とすれば　$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

となり，F_nはフィボナッチ数列。 ∎

【問題2】

F_nはフィボナッチ数列とする。$n>2$ ならば

$F_n=1+{}_{n-2}C_1+{}_{n-3}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-j}C_{j-1}+{}_{n-j-1}C_j$

が成り立つことを示せ。

ただし，$j\leqq\dfrac{n-1}{2}$ となる最大の整数をjとする。

【解答】　例えば

(Ⅰ)　nが偶数，$n=8$ のとき $F_8=21$

このとき，$N=6$ を考えて

(i)　6個全部が○は　○○○○○○　の1通り

(ii)　○が5個のとき　□○□○□○□○□○□

6個の□に×を1つ入れるので　${}_6C_1$通り

(iii)　○が4個のとき　□○□○□○□○□

5個の□に×を2つ入れるので　${}_5C_2$通り

(iv)　○が3個のとき　□○□○□○□

4個の□に×を3つ入れるので　${}_4C_3$通り

$F_8=1+{}_6C_1+{}_5C_2+{}_4C_3=1+6+10+4=21$

(Ⅱ)　nが奇数，$n=9$ のとき $F_9=34$

このとき $N=7$ を考えて

(i)　7個全部が○は　○○○○○○○　の1通り

(ii)　○が6個のとき

□○□○□○□○□○□○□

7個の□に×を1つ入れるので　${}_7C_1$通り

(iii)　○が5個のとき

□○□○□○□○□○□

6個の□に×を2つ入れるので　${}_6C_2$通り

(iv)　○が4個のとき　□○□○□○□○□

5個の□に×を3つ入れるので　${}_5C_3$通り

(v)　○が3個のとき　□○□○□○□

4個の□に×を4つ入れるので　${}_4C_4$通り

$F_9=1+{}_7C_1+{}_6C_2+{}_5C_3+{}_4C_4$

$=1+7+15+10+1=34$

F_nの作り方は，○の間に□を入れていくので

（I） nが偶数のとき

$\frac{n-2}{2}+1=\frac{n}{2}$ の□に $\frac{n}{2}-1$ の×を入れるので，

F_n の最後の項は，${}_{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}-1}$

（II） nが奇数のとき

$\frac{n-1}{2}$ の□に $\frac{n-1}{2}$ の×を入れるので，F_n の最後の項は，${}_{\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-1}{2}}$

ここで，$j \leqq \frac{n-1}{2}$ となる最大の整数を j とすれば，

（I） nが偶数のとき

$j=\frac{n}{2}-1$ としてよく，

$$n-j-1=n-\left(\frac{n}{2}-1\right)-1=\frac{n}{2}$$

$$j=\frac{n}{2}-1$$

となり，F_n の最後の項 ${}_{\frac{n}{2}}C_{\frac{n}{2}-1}$ と一致する。

（II） nが奇数のとき

$j=\frac{n-1}{2}$ としてよく，

$$n-j-1=n-\frac{n-1}{2}-1=\frac{n-1}{2}$$

$$j=\frac{n-1}{2}$$

となり，F_n の最後の項 ${}_{\frac{n-1}{2}}C_{\frac{n-1}{2}}$ と一致する。

よって，（問題２）が示された。 ∎

§3. おわりに

フィボナッチ数列が組合せを使って表現できることは驚きでした。

（問題２）を示すために，（問題１）のモデルを使い，それがフィボナッチ数列になることを確かめてから行いました。

《参考文献》

〔１〕 George E. Andrews
NUMBER THEORY
DOVER PUBLICATIONS, INC.

（千葉県立東金高等学校）