「場合の数」における「最短距離での行き方の数」を求める問題の簡単な解法

新田(あらた)　修(おさむ)

§1．はじめに

「場合の数」の分野で組合せを使って解く問題について，縦，横の格子状に走る道においての最短距離の問題が，組合せを使うための問題（組合せを教えるための問題）であることはわかっているが，より簡単な解法が長年にわたり世の中にあまり紹介されていないのを見て，私が20数年，生徒達に教えてきた解法を紹介します。

§2．「最短距離での行き方の数」を求める新たなる「新田の解法」

この問題の基本の考え方は「和の法則」で足し算だけで解くことができます。理解できれば，小学生でも大学入試の問題（難問）を簡単に解くことができます。

下記の（図1）において，各交差点からゴールへの「最短距離での行き方の数」を考えます。

ほとんどの交差点では，その数は分かりませんが，すぐ分かるところが2ケ所あります。それはゴールの左のカと，下のイです。この2ケ所からのゴールへの「最短距離での行き方の数」は1通り。

イの下のウは，ゴールへ最短で向かうには，上のイの方へ向かうしかないので，1通り。エも同様に1通りである。

カの左側にあるサ，タ，ナも右の方に向かうしかないので，1通りである。（図2）

ナ	タ	サ	カ	ゴール
ニ	チ	シ	キ	イ
ヌ	ツ	ス	ク	ウ
ネ	テ	セ	ケ	エ
スタート				

（図1）

1	1	1	1	ゴール
ニ	チ	シ	キ	1
ヌ	ツ	ス	ク	1
ネ	テ	セ	ケ	1
スタート				

（図2）

次に，キ，ク，シ，ス，チ，ツの＋の形の交差点では，最短でゴールに向かうには，上または右に向かうしかないので，和の法則により，上の交差点の数と右の交差点の数を加えた数が，その交差点のゴールまでの「最短距離での行き方の数」となります。（図3）

後は，同様にケ，セ，テ，ニ，ヌ，ネの交差点も和を求めていくと，（図4）のようにスタート地点からゴール地点までの「最短距離での行き方の数」35通り　が求まります。

1	1	1	1	ゴール
ニ	4	3	2	1
ヌ	10	6	3	1
ネ	テ	セ	ケ	1
スタート				

（図3）

1	1	1	1	ゴール
5	4	3	2	1
15	10	6	3	1
35	20	10	4	1
スタート				

（図4）

確認　${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$（通り）

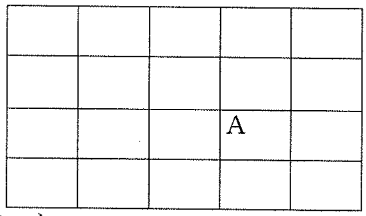
※　こういった問題は，「組合せの問題」として扱うより，「和の法則の応用」として扱う方が良い

のではないかと思います。

では，この解法を使って，色々な「最短距離での行き方の数」を求めてみましょう。

> 【問題１】 図５において，スタートからゴールへの最短距離での行き方のうち，交差点Ａを通る行き方の数は何通りあるか。

> 【問題２】 図５において，スタートからゴールへの最短距離での行き方のうちで，交差点Ａを通らない行き方の数は何通りあるか。



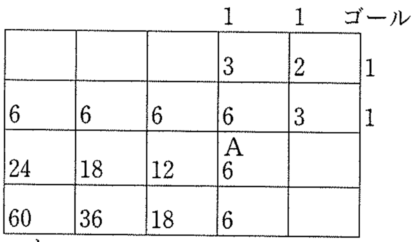
（図５）

【解答１】

今までの解法

$${}_5C_2\times{}_4C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}$$
$$=10\times6=60\text{（通り）}$$ 答

新田の解法



（図６）

答 60通り

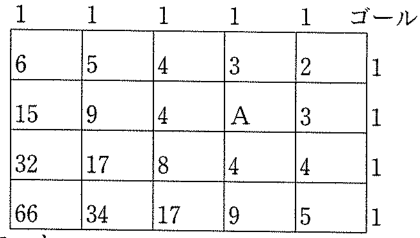
【解答２】

今までの解法

スタートからゴールへの全ての行き方の数から，Ａを通る行き方の数を引く。

$${}_9C_4-{}_5C_2\times{}_4C_2=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-60$$
$$=126-60=66\text{（通り）}$$ 答

新田の解法



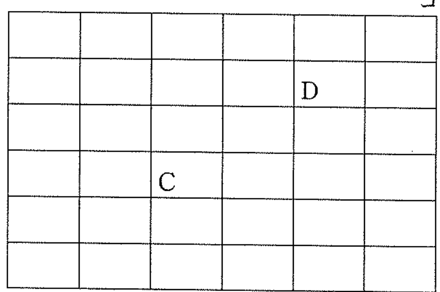
（図７）

Ａが通れないのでＡの左側は上だけに向かうので４

Ａの下側は右だけに向かうので４

答 66通り

> 【問題３】 図８において，スタートからゴールへ行く最短経路のうち，点Ｃ，点Ｄのどちらも通らないものは何通りあるか。



（図８）

【解答３】

今までの解法

① 点Ｃ，点Ｄに関係なく，スタートからゴールまでの「最短距離での行き方の数」は

$${}_{12}C_6=\frac{12!}{6!\cdot6!}=924\text{（通り）}$$

② 点Ｃを通る「最短距離での行き方の数」は

$${}_4C_2\times{}_8C_4=\frac{4!}{2!\cdot2!}\times\frac{8!}{4!\cdot4!}=420\text{（通り）}$$

③ 点Ｄを通る「最短距離での行き方の数」は

$${}_8C_4\times{}_4C_2=\frac{8!}{4!\cdot4!}\times\frac{4!}{2!\cdot2!}=420\text{（通り）}$$

④ 点Ｃ，点Ｄを通る「最短距離での行き方の数」は

$${}_4C_2\times{}_4C_2\times{}_4C_2=6\times6\times6=216\text{（通り）}$$

⑤ 点Ｃまたは点Ｄを通る「最短距離での行き方の数」は

$$420+420-216=624\text{（通り）}$$

したがって，点C，点Dを通らない「最短距離での行き方の数」は

924－624＝300（通り）　答

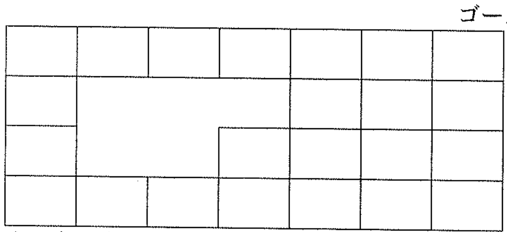
新田の解法

1	1	1	1	1	1	ゴール
7	6	5	4	3	2	1
22	15	9	4	D	3	1
54	32	17	8	4	4	1
86	32	C	17	9	5	1
150	64	32	32	15	6	1
300	150	86	54	22	7	1
スタート						

（図9）

答　300通り

【問題4】 図10において，スタートからゴールまでの「最短距離での行き方の数」は，何通りあるか。

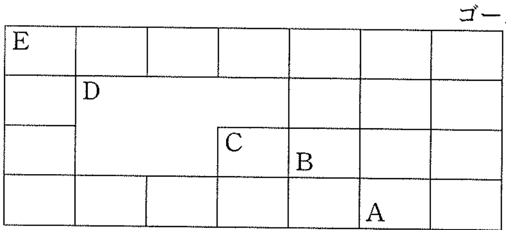


（図10）

【解答4】

今までの解法

図11のように，点A，B，C，D，Eをとる。



（図11）

① 点Aを通っての「最短距離での行き方の数」は15通り

② 点Bを通っての「最短距離での行き方の数」は100通り

③ 点Cを通っての「最短距離での行き方の数」は40通り

④ 点Dを通っての「最短距離での行き方の数」は28通り

⑤ 点Eを通っての「最短距離での行き方の数」は1通り

したがって，スタートからゴールへの「最短距離での行き方の数」は

15＋100＋40＋28＋1＝184（通り）　答

新田の解法

1	1	1	1	1	1	1 ゴール	
8	7	6	5	4	3	2	1
15	7		10	10	6	3	1
52	37	30	30	20	10	4	1
184	132	95	65	35	15	5	1
スタート							

（図12）

答　184通り

【問題5】 下のような道のある町がある。

AからBまでの最短経路について答えよ。

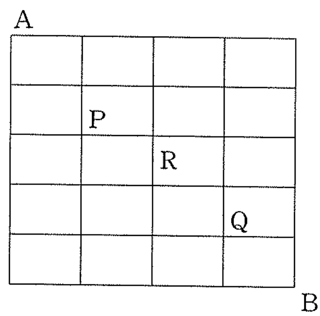
① P，Qをともに通る道順は何通りあるか。

② PまたはQを通る道順は何通りあるか。

③ PもQも通らない道順は何通りあるか。

④ ①のうちで，Rを通らない道順は何通りあるか。

ただし，P，Qは交差点，Rは，交差点と交差点の間



【解答５】

新田の解法

解答①

A				
36	12			
24	12 P			
12	12	6 R	2	
	6	4	2 Q	
	2	2	2	1
			1	B

答　36 通り

解答②

A				
126	56	21	6	1
70	35 P	15	5	1
35	20	10 R	4	1
15	10	6	3 Q	1
5	4	3	2	1
1	1	1	1	B

AからBへの全ての行き方が　126 通り

③よりP，Qどちらも通らない行き方が 32 通り

よって，PまたはQを通る行き方は

$$126-32=94$$

答　94 通り

解答③

A				
32	18	11	4	1
14	7 P	7	3	1
7		4 R	2	1
7	4	2	1 Q	1
3	2	1		1
1	1	1	1	B

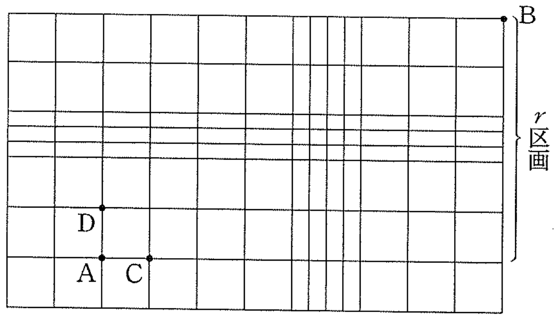
答　32 通り

解答④

A				
24	8			
16	8 P			
8	8	2 R	2	
	6	4	2 Q	
	2	2	2	1
			1	B

答　24 通り

公式



上の図で，AからBへ最短距離で行くには n 区画あり，そのうち，縦方向へ進むのが r 区画であるとすれば，AからBへの最短距離での行き方は，${}_nC_r$ 通りある。

Aの右側のCからBへの最短距離は，$(n-1)$ 区画で，縦方向へは r 区画。よって，CからBへの最短距離での行き方は ${}_{n-1}C_r$ 通りになる。

Aの上側のDからBへの最短距離は $(n-1)$ 区画で，縦方向へは $r-1$ 区画。よって，DからBへの最短距離での行き方は ${}_{n-1}C_{r-1}$ 通りになる。

ここで，AからBへの最短距離での行き方は，CからBへの最短距離での行き方と，DからBへの最短距離での行き方を加えたものであるから，公式

$${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$

が成り立つ。

《参考文献》

〔１〕 2008大学入試センター試験対策
数学Ⅰ・A＋Ⅱ・B 上級演習 PLAN 120
数研出版

（沖縄県立那覇工業高等学校）