100均電卓での累乗根の算出

大野（おおの）　栄一（えいいち）

§1. はじめに

100円ショップで電卓が手に入る。しかも $\sqrt{\ }$ キーが付いている。今ではあたりまえの事だが電卓が出現した昭和39～40年代初頭のことを考えると驚嘆すべき事である。初期の電卓は今各店にあるレジのような形状だった。重くて一人では運べなかった。各桁ごとに0から9のキーがあり，$\sqrt{\ }$ キーはついていなかった。とても片手の上には乗らず，電子式卓上計算機と呼ばれていた。これが省略され電卓と呼ばれるようになった。テンキーが採用され，小型化され，$\sqrt{\ }$ キーやメモリーキーが付いてきたときにはびっくりしたものである。ただし，お値段もすごく，あの当時で，数十万円也で今のパソコン以上だった。それ以後の技術革新はご存知の通りで，この調子で進むと関数電卓が100均で購入できる日が来るかもしれない。

電卓初期，それ以前の手回し計算機の時代では，四則計算の繰り返しで開平や開立を行っていたが，ソロバンのほうが速かった。ここでは，$+-\times\div\sqrt{\ }$ のキーが付いている，今ではごく普通の電卓で，任意の正の実数の累乗根を求めてみたい。ここでは100均電卓と呼ぶことにする。

§2. 開立

一般に正なる任意の実数 a の n 乗根（n は正の整数）を求めてみたい。

$n=1$ の場合は明らかであるし，$n=2$ の場合は $\boxed{\sqrt{\ }}$ キーを押すだけである。

$n=3$ の場合を考えてみる。

$$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$$

であるから，ここの $\frac{1}{3}$ を，初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数と考えると，

$$\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i$$

となり，

$$a^{\frac{1}{3}}=a^{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i}=a^{\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\right)}$$
$$=\prod_{i=1}^{\infty}a^{\left(\frac{1}{4}\right)^i}$$

a の4乗根は，

$$\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt{a}}$$

であるから，$a\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}$ で求めることができる。つまり，a の3乗根が求まる。具体的には，

$a\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}a\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}a\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}a\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}$……と気の済むまでキーを押せばよい。

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ であるから，実際には，電卓の精度によるが，どこかで1に収束してしまう。そこが限界になる。100均電卓でもかなりの所まで求める事ができる。

2の開立をやってみると，関数電卓，CASIOのfx-370ESでは，10桁表示で，

$$\sqrt[3]{2}=1.25992105$$

100均電卓キャンドゥNO. 33698では，なんと，12桁表示で，

$2\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}$	で	1.189207115
$2\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}$	で	1.24185781206
$2\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\times}$	で	1.25538075699
2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 8回 $\boxed{\times}$	で	1.2587844395
2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 10回 $\boxed{\times}$	で	1.25963680106
2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 12回 $\boxed{\times}$	で	1.2598499816
2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 14回 $\boxed{\times}$	で	1.25990328236
2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 16回 $\boxed{\times}$	で	1.25991660789
2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 18回 $\boxed{\times}$	で	1.25991993928
2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 20回 $\boxed{\times}$	で	1.25992077211

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 22 回 $\boxed{\times}$ で 1.25992098029

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 24 回 $\boxed{\times}$ で 1.25992103232

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 26 回 $\boxed{\times}$ で 1.2599210453

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 28 回 $\boxed{\times}$ で 1.25992104853

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 30 回 $\boxed{\times}$ で 1.25992104932

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 32 回 $\boxed{\times}$ で 1.2599210495

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 34 回 $\boxed{\times}$ で 1.25992104953

2 $\boxed{\sqrt{}}$ 36 回 で，1 になってしまうので，これ以上続けても不変。ここで終了で，

$$\sqrt[3]{2}=1.25992104953$$

を得る。

§3. n 乗根

前節までで 4 乗根までは求められることを示した。ここでは一般的に a の n 乗根を算出できることを示したい。a は正の実数としておく。

k を 4 以上の任意の整数とする。今 $n \leqq k$ なる正の整数 n について a の n 乗根が，演算キーが $+-\times\div\sqrt{}$ だけの電卓で算出できたと仮定する。

つまり，a の 2 乗根，3 乗根，……，k 乗根は，算出できるとする。このとき $n=k+1$ となっても算出できることを証明してみよう。

$k+1$ は正の整数なので，合成数か素数かのどちらかである。

まず合成数の場合を考えてみる。このとき $k+1$ は一通りに素因数分解ができて，

$$k+1=\prod_{i=1}^{p} \alpha_i \quad (\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \cdots\cdots \leqq \alpha_{p-1} \leqq \alpha_p \text{ で}$$

各 α_i は素数)

と表現できる。

また明らかに，$\alpha_1 \leqq k$，$\alpha_2 \leqq k$，……，$\alpha_p \leqq k$ である。そして，

$$\sqrt[k+1]{a}=\sqrt[\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\cdots\cdots\alpha_p]{a}$$
$$=\sqrt[\alpha_1]{\sqrt[\alpha_2]{\sqrt{\cdots\cdots\sqrt[\alpha_p]{a}}}}$$

仮定より，$n \leqq k$ の場合は算出できるので，最も奥の a の α_p 乗根から順に算出可能である。つまり，$k+1$ が合成数のとき，a の k 乗根が 100 均電卓で算出できるならば，a の $k+1$ 乗根も算出可能である。

次に $k+1$ が素数の場合を考えてみる。

k は 4 以上の任意の整数だったので，$k+1$ は奇数でもある。

よって，$(k+1)+1=2m$ (m は正の整数) と表せる。

$$\sqrt[k+2]{a}=\sqrt[2m]{a}=\sqrt[m]{\sqrt{a}}$$

$\sqrt{a}$ は $\boxed{\sqrt{}}$ キーで算出でき，$m \leqq k$ なので，$\sqrt[m]{\sqrt{a}}$ は算出できる。

つまり，$k+1$ が素数の場合，a の $k+2$ 乗根は算出できる。 ……①

(簡単にいうと，$k+2$ は合成数なので，$k+2$ 乗根の算出可能はすでに示されている。)

さて，

$$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{k+2}}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2}\right)^i$$

であるから，

$$\sqrt[k+1]{a}=a^{\frac{1}{k+1}}=a^{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2}\right)^i}=\prod_{i=1}^{\infty} a^{\left(\frac{1}{k+2}\right)^i} \qquad \cdots\cdots②$$

①②より，$\sqrt[k+1]{a}$ も算出できる。

つまり，$k+1$ が素数のとき，a の k 乗根が 100 均電卓で算出できるならば，a の $k+1$ 乗根も算出可能である。

これで，a の k 乗根が 100 均電卓で算出可能と仮定したとき，a の $k+1$ 乗根の算出が保障された。よって，2 乗根，3 乗根，4 乗根の算出可能とあわせて，数学的帰納法により，一般的に 100 均電卓で a の n 乗根が算出できることが証明された。

具体的に示してみよう。まず 2 の 6 乗根を算出して見よう。

$$\sqrt[6]{2}=\sqrt[2\cdot 3]{2}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}}$$

より，先程の $\sqrt[3]{2}=1.25992104953$ に続いて，$\boxed{\sqrt{}}$ キーを押すだけである。その結果，1.12246204814 となる。

関数電卓 fx-370ES では，

$\sqrt[6]{2}=1.122462048$ となる。

次に 2 の 5 乗根を算出して見よう。

$$\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}}=2^{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^i}=\prod_{i=1}^{\infty} 2^{\left(\frac{1}{6}\right)^i}$$

つまり，2 の 6 乗根，2 の 6^2 乗根，2 の 6^3 乗根，…… を算出し，積を求めればよい。この 100 均電卓はメモリーまで付いているので，

$\sqrt[6]{2}=1.12246204814$ (*1)

がディスプレイに出ている状態で，$\boxed{\mathrm{MC}}$，$\boxed{\mathrm{M+}}$ としておいて (注！)

$\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$
$\boxed{\times}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}$…… で収束するま

で繰り返し，最後に$\boxed{\sqrt{}}$で，

$\sqrt[6]{\sqrt[6]{2}}=1.01944064355$ (*2)

を得る（この場合は$\boxed{\text{MR}}\boxed{\sqrt{}}$ 34 回で 1 に収束した)。

fx-370ES では，一発で 1.019440644 となる。

同じ繰り返しで，$\boxed{\text{MC}}$，$\boxed{\text{M+}}$として（注！）
$\boxed{\text{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}\boxed{\text{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}\boxed{\text{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$
$\boxed{\times}\boxed{\text{MR}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}$……で収束するまで繰り返し，最後に$\boxed{\sqrt{}}$で，

$\sqrt[6]{\sqrt[6]{\sqrt[6]{2}}}=1.00321416897$ (*3)

(fx-370ES では 1.003214169)

以下同様（後ろの括弧内は fx-370ES の結果）に，

2 の 6^4 乗根 1.0005349787 (*4) (1.000534979)
2 の 6^5 乗根 1.00008914316 (*5) (1.000089143)
2 の 6^6 乗根 1.00001485656 (*6) (1.000014357)
2 の 6^7 乗根 1.000002476 (*7) (1.000002476)
2 の 6^8 乗根 1.0000004126 (*8) (1.000000413)
2 の 6^9 乗根 1.00000006871 (*9) (1.000000069)
2 の 6^{10} 乗根 1.0000000114 (*10) (1.000000011)
2 の 6^{11} 乗根 1.00000000186 (*11) (1.000000002)
2 の 6^{12} 乗根 1.00000000027 (*12) (1)
2 の 6^{13} 乗根 1.00000000002 (*13)
2 の 6^{14} 乗根 1 (*14)

最後に (*1)×(*2)×(*3)×……×(*13) で，

$\sqrt[5]{2}=1.1486983535$

を得る。

関数電卓 fx-370ES では，1.148698355 を得る。

（注！）ここでは一般的な電卓を想定して$\boxed{\text{MC}}$，$\boxed{\text{MR}}$を独立して記述したが，この 100 均電卓では統合され，$\boxed{\text{MRC}}$キー 1 つになっている。1 回押して，メモリー内の表示，2 回押して，メモリー内データのクリアとなっており，単独で$\boxed{\text{MC}}$だけを使用する事はできない。

メモリーに 0 以外の数値が入っているとき，ディスプレイ上に MEMORY と表示される。メモリー内の数値をクリアして，ディスプレイ上に表示されている数値をメモリーに入れるには，普通$\boxed{\text{MC}}\boxed{\text{M+}}$とすればいいのだが，この 100 均電卓では，
$\boxed{-}\boxed{\text{MCR}}\boxed{\text{M+}}$とする必要がある。

例えば，メモリー内に 23
ディスプレイ上に 223

が入っている状態で，メモリー内に 223 を入れたいとき，

(223)$\boxed{-}$23$\boxed{+}$23 とするわけである。このとき，

メモリー内 223
ディスプレイ上 200

となっている。ここで，$\boxed{\text{MRC}}$キーを押すと，メモリー内の 223 が呼出されて，ディスプレイ上に 223 が表示される。ただし，小数の場合，12 桁フル使用したとき桁落ちが出る場合がある。

例えば，メモリー内 55
ディスプレイ上 1.23456789101

の状態で，ディスプレイ上の 1.23456789101 をメモリーに入れようとして，

$\boxed{-}\boxed{\text{MCR}}\boxed{\text{M+}}\boxed{\text{MCR}}$

とすると，1.234567891 となってしまうので注意が必要である。

また，$\boxed{\text{MCR}}\boxed{\text{MCR}}$とするとディスプレイ上の数値もクリアされてしまう。

これ以後も記述上は一般的な$\boxed{\text{MC}}\boxed{\text{M+}}$とする。

§4. もう少し速く

前節までで，とにかく 100 均電卓で a の n 乗根を求められることはわかった。ただ，気の遠くなるようなキー操作が必要で実用的でないことは確かである。もう少し速く算出できる方法を考えてみたい。

例えば，a の立方根の場合，
$a\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}a\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}a\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}a\boxed{\sqrt{}}$
$\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\times}$……

と求めたが，

$$a^{\frac{1}{3}}=\prod_{i=1}^{\infty} a^{(\frac{1}{4})^i}=a^{(\frac{1}{4})^1}\cdot a^{(\frac{1}{4})^2}\cdot a^{(\frac{1}{4})^3}\cdots\cdots$$
$$=((((a^{1+\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}\times a)^{\frac{1}{4}}\times a)^{\frac{1}{4}}\times a)^{\frac{1}{4}}\cdots\cdots$$

と変形すると，$\times a)^{\frac{1}{4}}$ の繰り返しとなる。

つまり，$a\boxed{\times}a\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$とセットしておいて，$\boxed{\times}a\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$を繰り返せばよい。

2 の立方根で計算して見ると，

$2\boxed{\times}2\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.241857812707
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25538075702
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25878443954
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25963680112
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25984998168
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25990328246
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25991660801
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25991993942
$\boxed{\times}2\boxed{=}\boxed{\sqrt{}}\boxed{\sqrt{}}$ で 1.25992077227

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992098048

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992103253

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992104555

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.2599210488

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992104961

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992104982

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992104987

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992104988

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}\boxed{\surd}\boxed{\surd}$ で 1.25992104988

と収束する。かなり速くなり，しかも，こちらの方が精度がよい。100 均電卓で，

1.25992104988$\boxed{\mathrm{M+}}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{=}$と 3 乗してみると，

1.9999999992 となるが，

1.25992104953$\boxed{\mathrm{M+}}\boxed{\times}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{\times}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{=}$では，

1.99999999825 となる。

関数電卓 fx-370ES の 1.25992105 では，2.00000000049 となる。いずれにしても普通は，充分な精度だと思う。

§5. 拡張

ここでは，さらなるスピードアップを図り，さらに，指数を実数にまで拡張する。

a を正の実数，n を 1 より大なる実数として，a の n 乗根を考える。

ここで $\frac{1}{n}$ を 2 進数で表示して，

$$\frac{1}{n}_{(10)}=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{k(2)}$$

とおくと，

$$\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^i\cdot\alpha_i$$

よって，

$$a^{\frac{1}{n}}=a^{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^i\cdot\alpha_i}=\prod_{i=1}^{k}a^{\left(\frac{1}{2}\right)^i\cdot\alpha_i}$$

これは a の n 乗根が，$\boxed{\times}$ と $\boxed{\surd}$ キーで求められる事を示している。

一般に $m>0$ で a^m を考えてみよう。m の整数部分を p，小数部分を q とすると，

$$a^m=a^{p+q}=a^p\cdot a^q$$

で，a^p は $\boxed{\times}$ キーで求められ，a^q は上で示したように，$\boxed{\times}$ と $\boxed{\surd}$ キーで求められる。

$m=0$ の場合は計算の必要はないでしょう。また，$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ なので，n が実数，a が正の実数の場合について，$\boxed{+}\boxed{-}\boxed{\times}\boxed{\div}\boxed{\surd}$ の演算キーが付いている電卓では，一般的に，a^n が算出される事がわかる。

ここでは 2 の 5 乗根を求めてみよう。

$$\frac{1}{5}_{(10)}=0.001100110011\cdots\cdots_{(2)}$$

より，

$$\frac{1}{5}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{4i-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4i}\right)$$

つまり，

$$\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}}=2^{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{4i-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4i}\right)}$$
$$=2^{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots\cdots\right)}$$

よって，

2$\boxed{\surd}\boxed{\surd}\boxed{\surd}\boxed{\times}2\boxed{\surd}\boxed{\surd}\boxed{\surd}\boxed{\surd}\boxed{\surd}\boxed{\times}$ で 1.13878863474

2$\boxed{\surd}$ 7 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$ 8 回$\boxed{\times}$ で 1.14807647879

2$\boxed{\surd}$11 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$12 回$\boxed{\times}$ で 1.14865947777

2$\boxed{\surd}$15 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$16 回$\boxed{\times}$ で 1.14869592501

2$\boxed{\surd}$19 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$20 回$\boxed{\times}$ で 1.14869820296

2$\boxed{\surd}$23 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$24 回$\boxed{\times}$ で 1.14869834529

2$\boxed{\surd}$27 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$28 回$\boxed{\times}$ で 1.14869835415

2$\boxed{\surd}$31 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$32 回$\boxed{\times}$ で 1.14869835467

2$\boxed{\surd}$35 回$\boxed{\times}$2$\boxed{\surd}$36 回$\boxed{\times}$ で 1.14869835468

2$\boxed{\surd}$36 回で 1 となるので，ここで終了して，

$$\sqrt[5]{2}=1.14869835468$$

を得る。

$\frac{1}{5}$ の 2 進数変換は，

$\frac{1}{5}$ に $\frac{1}{2}$ が含まれているかを調べて，あれば **1** として $\left(\frac{1}{2}\right)$ を引く，なければ **0**

次に $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ が含まれているかを調べて，あれば **1** として $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ を引く，なければ **0**

次に $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ が含まれているかを調べて，あれば **1** として $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ を引く，なければ **0**

と各桁を決めて行くので，電卓では，次々と 2 を乗じて整数部を各桁の数値とすればよい。

0.2$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **0.4**

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **0.8**

$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$　で　**1.6**$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$　で　**1.2**$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$　で　**0.**4
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$　で　**0.**8
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$　で　**1.6**$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$　で　**1.2**$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$　で　**0.**4
⋮

と続ければよい。この場合は，0.00110011…… と循環小数となる。

次に $2^{\sqrt{3}}$，$\sqrt[\sqrt{3}]{2}$ を算出してみよう。

100 均電卓で，

$\sqrt{3}=1.73205080756$

を得て，まず 2 進数に変換してみる。$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として，

0.73205080756 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**46410161512$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
0.46410161512 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **0.**92820323024
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**85640646048$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
0.85640646048 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**71281292096$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
0.71281292096 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**42562584192$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
0.42562584192 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **0.**85125168384
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**70250336768$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
0.70250336768 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**40500673536$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
0.40500673536 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **0.**81001347072
$\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**62002694144$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
0.62002694144 $\boxed{\times}$2$\boxed{=}$ で **1.**24005388288$\boxed{-}$1$\boxed{=}$として
⋮

で，$\sqrt{3}_{(10)}$
$=1.101110110110011110101110100001010111\cdots\cdots_{(2)}$

よって，

2$\boxed{\times}$2$\boxed{\sqrt{}}$$\boxed{\times}$　で　2.82842712474
2$\boxed{\sqrt{}}$$\boxed{\sqrt{}}$$\boxed{\sqrt{}}$$\boxed{\times}$　で　3.08442165079
2$\boxed{\sqrt{}}$ 4 回$\boxed{\times}$　で　3.22098066384
2$\boxed{\sqrt{}}$ 5 回$\boxed{\times}$　で　3.29151095623
2$\boxed{\sqrt{}}$ 7 回$\boxed{\times}$　で　3.30938353519
2$\boxed{\sqrt{}}$ 8 回$\boxed{\times}$　で　3.31835618416
2$\boxed{\sqrt{}}$ 10 回$\boxed{\times}$　で　3.32060314493
2$\boxed{\sqrt{}}$ 11 回$\boxed{\times}$　で　3.32172719579
2$\boxed{\sqrt{}}$ 14 回$\boxed{\times}$　で　3.32186772886
2$\boxed{\sqrt{}}$ 15 回$\boxed{\times}$　で　3.32193799762
2$\boxed{\sqrt{}}$ 16 回$\boxed{\times}$　で　3.32197313252
2$\boxed{\sqrt{}}$ 17 回$\boxed{\times}$　で　3.32199070011
2$\boxed{\sqrt{}}$ 19 回$\boxed{\times}$　で　3.32199509198
2$\boxed{\sqrt{}}$ 21 回$\boxed{\times}$　で　3.32199618989
2$\boxed{\sqrt{}}$ 22 回$\boxed{\times}$　で　3.32199673881
2$\boxed{\sqrt{}}$ 23 回$\boxed{\times}$　で　3.32199701324
2$\boxed{\sqrt{}}$ 25 回$\boxed{\times}$　で　3.3219970818
2$\boxed{\sqrt{}}$ 30 回$\boxed{\times}$　で　3.32199708389
2$\boxed{\sqrt{}}$ 32 回$\boxed{\times}$　で　3.32199708438
2$\boxed{\sqrt{}}$ 34 回$\boxed{\times}$　で　3.32199708447
2$\boxed{\sqrt{}}$ 35 回$\boxed{\times}$　で　3.3219970845
2$\boxed{\sqrt{}}$ 36 回$\boxed{\times}$　で　3.3219970845

より，$2^{\sqrt{3}}=3.3219970845$ を得る。

前で確認したように，この電卓では 2$\boxed{\sqrt{}}$36 回で 1 になるので小数点以下 36 桁目まで算出したわけである。fx-370ES では一瞬で，3.321997085 を得る。

$\sqrt[\sqrt{3}]{2}$ はお楽しみとして，残しておこう。挑戦してみてください。.

fx-370ES では，そのまま数式を入れるだけで，1.492106248 と出てしまう。おもしろくも，おかしくもない。

§6. 最後に

今回使用したキャンドゥ 12Digits Calculator No. 33698 はメモリー機能も付いている。このメモリーをうまく使えばもっと短縮できると思う。100 均電卓はキータッチの感触があまりよくない。ゆっくり確実に押したほうがよい。しかし日常的な実用には十分である。手帳式カバーまで付いておりソーラー式とボタン電池併用である。電池交換不可，電池消耗後はソーラのみで使用可とあるが，ドライバーで裏蓋を開ければ交換可能である。しかしもう一つ買ったほうが安いかもしれない。検算には CASIO の 12 桁電卓 AZ-20S を使った。これは堅牢な造りで，キータッチが確実で使用感も良い。

この稿を書くにあたり，100 円ショップを回って

みた。電卓はたいていの店に置かれていた。色んなデザインのものがある。$\boxed{\sqrt{}}$ キーが付いていない電卓も多い。8桁が主流で12桁は，私がみた範囲ではこれだけだった。電卓のコレクターとしては100均巡りもおもしろい。

最後に $\boxed{\sqrt{}}$ キーが付いていない電卓でも a の n 乗根を求められることを示しておこう。n を正の整数，a を正の実数としてニュートン法を使ってみる。

$\sqrt[n]{a}=x$ とおくと，$x^n=a$

$f(x)=x^n-a$ とすると，　　$f'(x)=nx^{n-1}$

$x=a_k$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y-f(a_k)=f'(a_k)(x-a_k)$$

$y=0$ のとき $x=a_{k+1}$ とすると

$$a_{k+1}=a_k-\frac{(a_k)^n-a}{n\cdot(a_k)^{n-1}}$$

a の3乗根を求めてみる。$n=3$ とすると，

$$a_{k+1}=\frac{2\cdot(a_k)^3+a}{3\cdot(a_k)^2}$$

繰り返し計算になるので，メモリー機能を使って，初期値を a_1 とすると，

$\boxed{a_1}\overset{*}{\boxed{\mathrm{M+}}}\boxed{\times}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{\times}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{+}\boxed{a}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{\div}\boxed{\mathrm{MR}}\boxed{\div}$

$\boxed{\mathrm{MR}}\underset{**}{\boxed{=}}\overset{*\leftarrow}{\boxed{\mathrm{MC}}}$

（MC から M+ へ戻る。この間ループとなり $**\boxed{=}$ で判定し，必要な精度で stop する。）

で求められる。

ここでは，前に求めた2の3乗根を算出しておく。

ここでは，$a=2$，初期値を $a_1=1$ として，ダイソーの100均電卓ソーラー式8桁表示 No. 8441 を使用した。上記最後の $\boxed{\mathrm{MC}}$ は，100金電卓では，$\boxed{-}$ $\boxed{\mathrm{MRC}}\boxed{\mathrm{M+}}\boxed{\mathrm{MRC}}$ とする必要がある。$\boxed{\mathrm{MR}}$ は $\boxed{\mathrm{MRC}}$ でよい。

1回目	1.3333333
2回目	1.2638887
3回目	1.2599334
4回目	1.2599209
5回目	1.2599209

で，後は不変なので，　$\sqrt[3]{2}=1.2599209$

とする。前回に比べて，結構速く良い精度に収束している。$\boxed{\sqrt{}}$ キーを使いながら前回の苦労は何だ！ということになるが，そこがまた面白いところである。まだまだ，いい手を考える事は出来ると思う。まあ今回は100均電卓でのお遊びと思ってほしい。

《参考文献》

〔1〕 電卓で遊ぶ数学　大野栄一　講談社　1992

（大阪府　大谷高等学校）