三角形に関する公式の類似

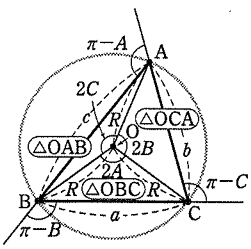
小山（こやま）　拓輝（ひろあき）

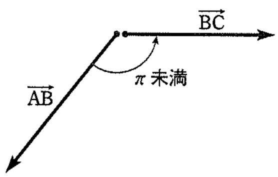
§0. はじめに

高校では数Ｉの図形と計量という分野で，三角形に関する数々の公式を学ぶ。そのひとつの余弦定理とは，三角形の辺の長さと角度の大きさの関係を表したものである。ところが，三角形を外心と頂点を結ぶ線分によって3分割したとき，その分割された面積と分割された角度の大きさについて，類似の関係式があることを知った。

どうしてそのような類似があるのか，また，他の類似はあるのか，という疑問が思い浮かび，自分なりに考えた結果をまとめてみた。なお，記号などは主に図をもとにする。

§1. 三角形に関する公式





平面上の三角形において，左回りに頂点 A，B，C をとる。つまり，$\overrightarrow{AB}$ をAを中心として，正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{BC}$ と正の方向が重なるとする。また，△ABC は鋭角三角形であるとする。つまり，外心Oは △ABC 内にあるとする。今回，三角形にこういった制限をつけて考察するのは，簡単のためである。実際には，こういった制限をつけなくても考察できる場合がある。

△ABC における辺の長さや角度の大きさなどを図のようにして定める。また，△ABC における外心Oをとり，OA，OB，OC を線で結ぶ。このとき，

外角 $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ ⟷ 中心角 $2A$，$2B$，$2C$

辺の長さの比 $a:b:c$ ⟷ 分割された面積の比 △OBC：△OCA：△OAB

といった対応を考えると，三角形に関する公式の類似がうまく記述できる。

3つの外角の関係：

△ABC において，外角の和は 2π つまり，$(\pi-A)+(\pi-B)+(\pi-C)=2\pi$

(証明略)

3つの中心角の関係：

△ABC と外心Oにおいて，中心角の和は 2π つまり，$2A+2B+2C=2\pi$

(証明略)

3つの辺の長さの関係：

△ABC において，三角不等式が成立。 つまり，$a+b>c$ など。

(証明略)

3つの分割された面積の関係：

△ABC と外心Oにおいて，以下などが成立。 △OBC＋△OCA＞△OAB

(幾何的証明)　△OBC＋△OCA と △OAB を OC とその延長で分割し，それを底辺とみなす。頂点をAやBとみなす。△OBC＋△OCA：△OAB を考えると，その比は底辺の比と同じになる。

外心Oは △ABC 内にあるとしたことに注意すると，△OBC＋△OCA の底辺は外接円の半径 R であるが，△OAB の底辺は外接円の半径 R より短い。したがって，△OBC＋△OCA＞△OAB

(解析的証明)　$\triangle OBC=\dfrac{R^2}{2}\sin 2A$，$\triangle OCA=\dfrac{R^2}{2}\sin 2B$，$\triangle OAB=\dfrac{R^2}{2}\sin 2C$ であるから，同値変形すると，

$\triangle OBC + \triangle OCA > \triangle OAB$

$\Longleftrightarrow \sin 2A + \sin 2B > \sin 2C$

$\Longleftrightarrow \sin 2A + \sin 2B > \sin\{2\pi - 2(A+B)\}$

$\Longleftrightarrow \sin 2A + \sin 2B > -\sin 2(A+B)$

$\Longleftrightarrow \sin 2A + \sin 2B > -(\sin 2A \cos 2B + \cos 2A \sin 2B)$

$\Longleftrightarrow \sin 2A(1+\cos 2B) + \sin 2B(1+\cos 2A) > 0$

ここで，三角形は鋭角三角形としたことから，$0<2A<\pi$，$0<2B<\pi$ より，最後の不等式が成立することが分かり，題意も成立する。

正弦定理：

△ABC において，外角と辺の長さの関係が以下のように成立。

$$\frac{a}{\sin(\pi - A)} = \frac{b}{\sin(\pi - B)} = \frac{c}{\sin(\pi - C)} = 2R$$

(略証明) $\sin(\pi - A) = \sin A$ であるから。

正弦定理の類似：

△ABC と外心Oにおいて，中心角と分割された面積の関係が以下のように成立。

$$\frac{\triangle OBC}{\sin 2A} = \frac{\triangle OCA}{\sin 2B} = \frac{\triangle OAB}{\sin 2C} = \frac{R^2}{2}$$

(略証明) $\triangle OBC = \frac{R^2}{2}\sin 2A$ であるから。

余弦定理：

△ABC において，１つの外角と３辺の長さの関係が以下などのように成立。

$$\cos(\pi - A) = -\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

(略証明) $\cos(\pi - A) = -\cos A$ であるから。

余弦定理の類似：

△ABC と外心Oにおいて，１つの中心角と３つの分割された面積の関係が以下などのように成立。

$$\cos 2A = -\frac{(\triangle OCA)^2 + (\triangle OAB)^2 - (\triangle OBC)^2}{2\triangle OCA \cdot \triangle OAB}$$

(注意) ここではじめて自明でなさそうな関係式が登場するので，丁寧に証明してみる。

(証明) (左辺)

$=\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$$= 2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{(b^2+c^2)^2 - 2(b^2+c^2)a^2 + a^4 - 2b^2c^2}{2b^2c^2}$$

$$= \frac{b^4+c^4+a^4-2a^2(b^2+c^2)}{2b^2c^2}$$

次に，$\triangle OBC = \frac{R^2}{2}\sin 2A$，$\triangle OCA = \frac{R^2}{2}\sin 2B$，$\triangle OAB = \frac{R^2}{2}\sin 2C$ であるから，

$$(\text{右辺}) = -\frac{(\triangle OCA)^2 + (\triangle OAB)^2 - (\triangle OBC)^2}{2\triangle OCA \cdot \triangle OAB}$$

$$= -\frac{\sin^2 2B + \sin^2 2C - \sin^2 2A}{2\sin 2B \sin 2C}$$

$$= -\frac{(\sin B \cos B)^2 + (\sin C \cos C)^2 - (\sin A \cos A)^2}{2(\sin B \cos B)(\sin C \cos C)}$$

$$= -\frac{b^2\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2 + c^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 - a^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}{2bc\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

$$= -\frac{b^4(c^2+a^2-b^2)^2 + c^4(a^2+b^2-c^2)^2 - a^4(b^2+c^2-a^2)^2}{2b^2c^2(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

$$= -\frac{b^4(c^2+a^2-b^2)^2 + (c^2a^2+c^2b^2-c^4+a^2b^2+a^2c^2-a^4)(c^2b^2-c^4-a^2b^2+a^4)}{2b^2c^2(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

$= -[b^4(c^2+a^2-b^2)^2 + (c^2a^2+c^2b^2-c^4+a^2b^2+a^2c^2-a^4)$
$\{b^2(c^2-a^2)+(a^2+c^2)(a^2-c^2)\}]$
$\div 2b^2c^2(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$

$= -[b^4(c^2+a^2-b^2)^2 + (c^2a^2+c^2b^2-c^4+a^2b^2+a^2c^2-a^4)$
$(c^2+a^2-b^2)(a^2-c^2)] \div 2b^2c^2(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$

$$= -\frac{b^4(c^2+a^2-b^2) + \{b^2(c^2+a^2)-(a^2-c^2)^2\}(a^2-c^2)}{2b^2c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

$$= \frac{b^6 - b^4(c^2+a^2) - b^2(a^4-c^4) + (a^2-c^2)^3}{2b^2c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

(ここで，b^2 を固まりとし，分子をその３次式と見なして，$b^2=c^2-a^2$ を代入すると０になる。つまり，分子は $b^2+a^2-c^2$ で割り切れるから実際に割ってみる。)

$$= \frac{b^4 - 2a^2b^2 + (a^2-c^2)^2}{2b^2c^2}$$

$$= \frac{b^4+c^4+a^4-2a^2(b^2+c^2)}{2b^2c^2}$$

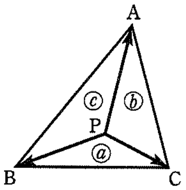
よって，(左辺)＝(右辺)

以上，三角形における関係式において，「外角」を「中心角」，「辺の長さの比」を「(外心Oによって)分割された面積の比」に対応させると，同じ関係式が成立することを見てきた。では，その原因は何なのであろうか？

§2. ガウス写像

まず，準備として，次の事実を紹介しておく。

> $a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，
> $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$
> $\Longleftrightarrow \triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}$
> $=a:b:c$



(証明略)

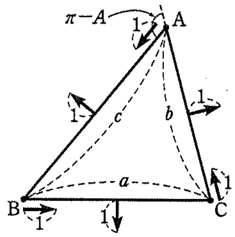
以下，類似の原因を探るために，§1 の三角形において，ガウス写像を考える。つまり，三角形の 3 つの辺に対して，三角形の外側に単位法線ベクトルをとる。

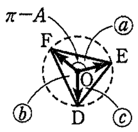
辺 BC の単位法線ベクトルの始点を原点Oにもってきたとき，終点をDとする。

辺 CA の単位法線ベクトルの始点を原点Oにもってきたとき，終点をEとする。

辺 AB の単位法線ベクトルの始点を原点Oにもってきたとき，終点をFとする。

△DEF を考えると，単位円に内接している。





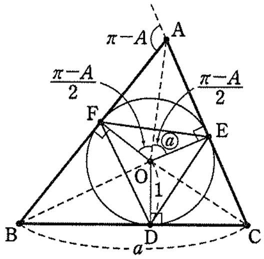
また，△ABC における単位法線ベクトルを正の向きに 90° 回転させると，辺の向きと同じ単位接線ベクトルとなる。$\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{0}$ であるから，

$a\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}+b\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|}+c\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\vec{0}$ となり，元の単位法線ベクトルにおいては，$a\overrightarrow{\mathrm{OD}}+b\overrightarrow{\mathrm{OE}}+c\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{0}$ が成り立ち，冒頭に述べた事実から上の右図のような面積比になる。また，△ABC における外角と，△DEF における中心角は一致していることが分かる。

つまり，△ABC における外角 $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ や，辺の長さの比 $a:b:c$ に対して成立する関係式を，△DEF における中心角 $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ や，分割された面積の比 $a:b:c$ における関係式とみなすことができるのである。

§3. 内接，外接

以下，§1 で問いかけた類似の原因を，内接，外接という別の観点から眺めてみることにする。



図のように，単位円に外接する △ABC と，単位円に内接する △DEF を考える。また，簡単のために，単位円の中心Oは，△DEF の内部にあるものとする。

このとき，△ABC における外角は $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ となり，辺の長さの比は $a:b:c$ となる。△DEF における中心角は $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ となっている。また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は辺 BC の単位法線ベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は辺 CA の単位法線ベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ は辺 AB の単位法線ベクトルになっていることに注意すると，§2 より，

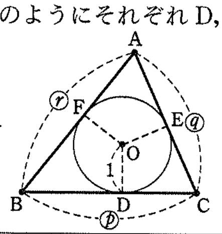
$\triangle\mathrm{OEF}:\triangle\mathrm{OFD}:\triangle\mathrm{ODE}=a:b:c$

となっている。

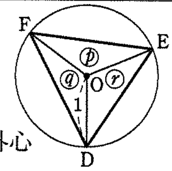
よって，§2 と同様に，△ABC における外角 $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ や，辺の長さの比 $a:b:c$ に対して成立する関係式を，△DEF における中心角 $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ や，分割された面積の比 $a:b:c$ における関係式とみなすことができるのである。

ところで，§2 で考えたことから以下が成立する。

> 単位円に外接する △ABC において，単位円と △ABC の各辺との接点を図のようにそれぞれ D，E，F とすると，
> $p\overrightarrow{\mathrm{OD}}+q\overrightarrow{\mathrm{OE}}+r\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{0}$
> ただし，Oは △ABC における内心
> $p:q:r=\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}$



> 単位円に内接する鋭角三角形 DEF において，
> $p\overrightarrow{\mathrm{OD}}+q\overrightarrow{\mathrm{OE}}+r\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{0}$
> ただし，Oは △DEF における外心
> $p:q:r=\triangle\mathrm{OEF}:\triangle\mathrm{OFD}:\triangle\mathrm{ODE}$



§4. ベクトル表現

§3の後半に書いた事実から，三角形はベクトル表現と関係があることが分かる。このセクションでは，三角形をいったん忘れて，

$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{0}$

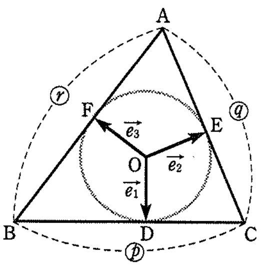
$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は平面上の単位ベクトル

という形を考え，それが何を意味しているのかを2種類の方法で考えてみる。

まず，$p:q:r$ が既知で，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は未知であったとする。なお，簡単のために，

$p>0$，$q>0$，$r>0$ かつ p，q，r は三角不等式を満たす

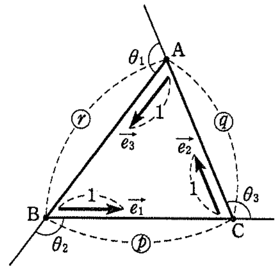
とする。



このとき，3辺の比が $p:q:r$ の三角形を図のように描く。そのような三角形はいくつも描けるが，その中で，単位円に外接するものを描く。その頂点を，図のようにA, B, Cとする。単位円の中心をOとする。単位円と三角形との接点を図のように，D, E, Fとする。このとき，$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{OF}$ とすれば，§3の後半より $p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{0}$ が成立する。

つまり，$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{0}$ をもとにして，△ABCが作られると考えることができる。このとき，係数の比 $p:q:r$ は，△ABCの各辺の比を意味している。単位ベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は，内心から接点へのベクトルを意味している。$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は，各辺の単位法線ベクトルを意味しているともいえる。

また，同じことであるが次のように考えることもできる。



3辺の比が $p:q:r$ の三角形を図のように描く。その頂点を，図のようにA, B, Cとする。

このとき，

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|},\quad \overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|},\quad \overrightarrow{e_3}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

とすれば，

$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{0}$

が成立する。

つまり，$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{0}$ をもとにして，△ABCが作られると考えることができる。このとき，係数の比 $p:q:r$ は，△ABCの各辺の比を意味している。単位ベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は，各辺の単位接線ベクトルを意味している。なお，

$p>0$，$q>0$，$r>0$ かつ p，q，r は三角不等式を満たす

としたことから，

$\overrightarrow{e_1}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_2}$ と正の方向が重なる

$\overrightarrow{e_2}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_3}$ と正の方向が重なる

$\overrightarrow{e_3}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_1}$ と正の方向が重なる

となる。それぞれの回転角を θ_3，θ_1，θ_2 とすると，それは外角を意味している。

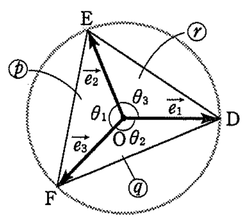
次に，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ が既知で，$p:q:r$ は未知であったとする。なお，簡単のために，

$\overrightarrow{e_1}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_2}$ と正の方向が重なる

$\overrightarrow{e_2}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_3}$ と正の方向が重なる

$\overrightarrow{e_3}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_1}$ と正の方向が重なる

とする。



このとき，原点Oを始点として，ベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ を描く。ベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ の終点をそれぞれD，E，Fとすると△DEFは鋭角三角形となる。このとき，

$p:q:r=\triangle\mathrm{OEF}:\triangle\mathrm{OFD}:\triangle\mathrm{ODE}$

とすれば，§2の冒頭で述べた事実より

$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$

が成立する。

つまり，$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$ をもとにして，△DEF が作られると考えることができる。このとき，$p:q:r$ は，△DEF の分割された面積の比を意味している。$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は，外心から頂点へのベクトルを意味している。なお，

$\overrightarrow{e_1}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_2}$ と正の方向が重なる

$\overrightarrow{e_2}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_3}$ と正の方向が重なる

$\overrightarrow{e_3}$ を正の向きに π 未満の回転をすると，$\overrightarrow{e_1}$ と正の方向が重なる

としたことから，

$p>0$，$q>0$，$r>0$ かつ p，q，r は三角不等式を満たす

となる。それぞれの回転角を θ_3，θ_1，θ_2 とすると，それは中心角を意味している。

以上から，$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$ というベクトル表現をもとにして，2種類の三角形が作られ，一方の辺の比は他方の面積の比，一方の外角は他方の中心角を意味していることが分かった。

§5. p，q，r，θ_1，θ_2，θ_3 の関係式

§4の続きとして

$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$

$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は平面上の単位ベクトル

という形から作られた2種類の三角形において，p，q，r，θ_1，θ_2，θ_3 の間に成立する関係式を考える。

定義から，

$\theta_1+\theta_2+\theta_3=2\pi$

が成立するが，これは2種類の三角形において次の意味がある。

> △ABC の外角の和は 2π であることを意味している。
>
> △DEF の中心角の和は 2π であることを意味している。

次に，$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$ において，左から $\overrightarrow{e_1}$ を外積してみる。なお，z 成分0をつけたして，3次元空間ベクトルとみなしている。

$p\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$

ここで，

$p\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_1}=\vec{0}$，$\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}=-\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}$

であるから，

$q\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}=r\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}$

ここで，$\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}$ と $\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}$ は z 軸正方向のベクトルであるから，($\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ の向きの関係に制限をつけていたことに注意)

$q:r=|\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}|:|\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}|$

$q:r=\sin\theta_2:\sin\theta_3$

同様にして，

$p:q:r=\sin\theta_1:\sin\theta_2:\sin\theta_3$

これは2種類の三角形において次の意味がある。

> △ABC の辺の比は，外角の sin の比と同じであることを意味している(正弦定理)。
>
> △DEF の分割された面積の比は，中心角の sin の比と同じであることを意味している。

次に，$p\overrightarrow{e_1}+q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}=\vec{0}$ を，$p\overrightarrow{e_1}=-(q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3})$ と変形し，両辺において自身と内積してみる。

$|p\overrightarrow{e_1}|^2=|q\overrightarrow{e_2}+r\overrightarrow{e_3}|^2$

ここで，

$|\overrightarrow{e_1}|^2=|\overrightarrow{e_2}|^2=|\overrightarrow{e_3}|^2=1$

であるから，

$p^2=q^2+r^2+2qr\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}$

$$\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}=-\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}$$

$$\cos\theta_1=-\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}$$

これは2種類の三角形において次の意味がある。

> △ABC の外角の cos は，辺の比を用いて表すことができる(余弦定理)。
>
> △DEF の中心角の cos は，分割された面積の比を用いて表すことができる。

以上，当初は不思議に思えた，分割された面積を用いた余弦定理の類似であるが，三角形の見方を変えることで，当然の事実であることが分かった。

(静岡県　元数学講師)