－数研通信 61 号を読んで－

# $\sum ij$，$\sum i^3j^2$ 等について

四宮（しのみや）　一成（かずしげ）

## §1. はじめに

数研通信 No.61 に「数研通信 No.59 を読んで」が数編掲載されている。これらから思いついたことであるが，標題の公式を導く。これを導いておけば，村井先生が導いた $N_n^{n+1}$，$N_n^{n+2}$，…についての公式(No.61 の $p.26$，27)を，私の導いた公式(同 $p.23$)で導くことができる。そのことを示そう。(ただ，以下の方法は計算が非常に複雑である。私は数式計算処理ソフト Mathematica の助けを借りた)

## §2. $\sum ij$，$\sum i^3j^2$ 等の定義

**(定義)** 1，2，3，…，$n$ から，相異なる $r$ 個の自然数 $i_1$，$i_2$，…，$i_r$ を選び，その選び方すべてにわたる関数 $f(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r)$ の値の和を

$$\sum f(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r)$$

と表す。

ただし，対称性のある場合，計上するのは 1 つだけとする。例えば，

$\sum ij$ は，$1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+(n-1)n$

であって，

$1\cdot2+2\cdot1+1\cdot3+3\cdot1+\cdots\cdots+(n-1)n+n(n-1)$

ではない。一方，$\sum i^2j$ は，

$1^2\cdot2+2^2\cdot1+1^2\cdot3+3^2\cdot1+\cdots\cdots+(n-1)^2n+n^2(n-1)$

である。もちろん $i=j$ の形 ($2^2\cdot2$ 等) は含まない。

## §3. 各種の公式

(1-1)　$\sum i=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2-1)　$\sum i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2-2)　$(\sum i)^2$ を展開すると

$i^2$ の形のものが　　　1 回現れ，

$ij$ の形のものが　$2!=2$ 回現れるから

$(\sum i)^2=\sum i^2+2\sum ij$

$$\therefore \sum ij=\frac{1}{2}\{(\sum i)^2-\sum i^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$$

これは，数学B数列で，有名な求め方である。

(3-1)　$\sum i^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

(3-2)　$\sum i^2\cdot\sum j=\sum i^3+\sum i^2j$ であるから

$$\sum i^2j=\sum i^2\cdot\sum j-\sum i^3=\frac{1}{6}(n-1)n^2(n+1)^2$$

(3-3)　$(\sum i)^3$ を展開すると

$i^3$ の形のものが　　　　1 回現れ，

$i^2j$ の形のものが　$3!/2!=3$ 回現れ，

$ijk$ の形のものが　　$3!=6$ 回現れるから，

$(\sum i)^3=\sum i^3+3\sum i^2j+6\sum ijk$

$$\therefore\quad \sum ijk=\frac{1}{6}\{(\sum i)^3-\sum i^3-3\sum i^2j\}$$

$$=\frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$$

以下同様の計算を行うので結果のみ示す。

(4-1)　$\sum i^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

(4-2)　$\sum i^3j=(\sum i^3)(\sum j)-\sum i^4$

$$=\frac{1}{120}(n-1)n(n+1)(15n^3+21n^2-4)$$

(4-3)　$\sum i^2j^2=\frac{1}{2}\{(\sum i^2)^2-\sum i^4\}$

$$=\frac{1}{360}(n-1)n(n+1)(2n-1)(2n+1)(5n+6)$$

(4-4)　$\sum i^2jk=\frac{1}{2}\{(\sum i^2)(\sum j)^2-\sum i^4$

$$-2\sum i^3j-2\sum i^2j^2\}$$

$$=\frac{1}{720}(n-2)(n-1)n(n+1)(30n^3+35n^2-11n-12)$$

(4-5)　$\sum ijkl=\frac{1}{24}\{(\sum i)^4-\sum i^4-4\sum i^3j-6\sum i^2j^2$

$$-12\sum i^2jk\}$$

$=\frac{1}{5760}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)$

$\times(15n^3+15n^2-10n-8)$

(5-1) $\sum i^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$

(5-2) $\sum i^4j=(\sum i^4)(\sum j)-\sum i^5$

$=\frac{1}{60}(n-1)n^2(n+1)^2(2n-1)(3n+4)$

(5-3) $\sum i^3j^2=(\sum i^3)(\sum j^2)-\sum i^5$

$=\frac{1}{24}(n-1)n^2(n+1)^2(2n^2+n-2)$

(5-4) $\sum i^3jk=\frac{1}{2}\{(\sum i^3)(\sum i^2)-\sum i^5$

$-2\sum i^4j-\sum i^3j^2\}$

$=\frac{1}{480}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(15n^2+7n-16)$

(5-5) $\sum i^2j^2k=\frac{1}{2}\{(\sum i^2)^2(\sum k)-\sum i^5$

$-\sum i^4j-2\sum i^3j^2\}$

$=\frac{1}{720}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(20n^2+4n-27)$

(5-6) $\sum i^2jkl=\frac{1}{6}\{(\sum i^2)(\sum j)^3-\sum i^5-3\sum i^4j$

$-4\sum i^3j^2-6\sum i^3jk-6\sum i^2j^2k\}$

$=\frac{1}{720}(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(5n^2-8)$

(5-7) $\sum ijklm=\frac{1}{120}\{(\sum i)^5-\sum i^5-5\sum i^4j$

$-10\sum i^3j^2-20\sum i^3jk-30\sum i^2j^2k-60\sum i^2jkl\}$

$=\frac{1}{11520}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2(3n^2-n-6)$

## §4. 組み分け方の総数の求め方への応用

数研通信 61 号で，村井靖雄先生は

【異なる$m$個のモノを名前の付いた$n$個の組に空箱を作らないで分けるときの分け方の総数を$N_n^m$とすると，$N_n^m=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k(n-k)^m$である。】

を導いており，同じく数研通信 61 号で，私は，

【$\sum 1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3}\cdots n^{a_n}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k(n-k)^m$ ただし，左辺の$\sum$は，$a_1+a_2+\cdots+a_n=m$ を満たす自然数 $a_i$の組すべてにわたっての和である。$(m\geqq n)$】

を導いている。

この 2 つを繋ぐと次の定理を得る。

$N_n^m=\sum 1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3}\cdots n^{a_n}$ …①

ただし，左辺の $N_n^m$ は上記の組み分け数で，右辺の$\sum$は

$a_1+a_2+\cdots+a_n=m$ …②

を満たす自然数 $a_i$ の組すべてにわたっての和である。$(m\geqq n)$

この定理によって，村井先生が導いている $N_n^{n+1}$, $N_n^{n+2}$, …を求めよう。

ただ，先生も述べているように，$N_n^{n+1}$, $N_n^{n+2}$, …は $n!$ の倍数であるから，$S_n^m=\frac{N_n^m}{n!}$ とおいて，$S_n^m$ を求めることで代えることにする。ちなみにこの $S_n^m$ は第 2 種スターリング数である。つまり，各室が区別の付かない場合の組み分け方の総数である。

**1 $N_n^{n+1}$ について**

$m=n+1$ の場合であるから，②が，

$a_1+a_2+\cdots+a_n=n+1$ となる。これを満たす $a_i$ の組は

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=(2,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$,

$(1,\ 2,\ 1,\ \cdots,\ 1)$, …, $(1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 2)$

に限られる。従って，①の右辺が次のように変形される。

$N_n^{n+1}=1^2\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n+1\cdot2^2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$

$+\cdots+1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n^2$

$=(1+2+\cdots+n)\cdot1\cdot2\cdot\cdots\cdot n=\sum i\cdot n!$

$\therefore\ S_n^{n+1}=\sum i=\frac{1}{2}n(n+1)$

**2 $N_n^{n+2}$ について**

1 と同様に，②が，$a_1+a_2+\cdots+a_n=n+2$ となり，これを満たす $a_i$ の組は

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=(3,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$,

$(1,\ 3,\ 1,\ \cdots,\ 1)$, …, $(1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ 3)$,

$(2,\ 2,\ 1,\ \cdots,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots,\ 1)$,

…, $(1,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ 2)$

に限られる。従って，①の右辺が次のように変形される。

$N_n^{n+2}=1^3\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n+1\cdot2^3\cdot3\cdot\cdots\cdot n+\cdots+1\cdot2\cdot3\cdot$

$\cdots\cdot n^3+1^2\cdot2^2\cdot3\cdot\cdots\cdot n+1^2\cdot2\cdot3^2\cdot4\cdot$

$\cdots\cdot n+\cdots+1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)^2n^2$

$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)\cdot n!+(1\cdot2+1\cdot3+\cdots$

$+(n-1)n)\cdot n!$

$\therefore\quad S_n^{n+2}=\sum i^2+\sum ij$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+1)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

**3　$N_n^{n+3}$, $N_n^{n+4}$, $N_n^{n+5}$ について**

同様に，$S_n^{n+3}=\sum i^3+\sum i^2j+\sum ijk$

$$=\frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n+2)(n+3)$$

$$S_n^{n+4}=\sum i^4+\sum i^3j+\sum i^2j^2+\sum i^2jk+\sum ijkl$$

$$=\frac{1}{5760}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\times(15n^3+30n^2+5n-2)$$

$$S_n^{n+5}=\sum i^5+\sum i^4j+\sum i^3j^2+\sum i^3jk+\sum i^2j^2k+\sum i^2jkl+\sum ijklm$$

$$=\frac{1}{11520}n^2(n+1)^2(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)\times(3n^2+7n-2)$$

## §5. おわりに

この方法で，$N_n^{n+5}$ 等を求めるのは，優秀な数式処理ソフトがあれば話は別だが，計算が大変で，良い方法とはいえない。村井先生の方法が断然すぐれている。しかし，$\sum ijklm$ 等は参考になるかもしれないと紹介する次第である。

《参考文献》

〔1〕「組み分けの総数の種々の公式と

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$

の組合せ論的な意味について」村井靖雄　数研通信 No. 61　数研出版

〔2〕「$n!$ を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表そう」四宮一成　数研通信 No. 61　数研出版

（元徳島県教員）