二項係数の逆数和

大塚　秀幸（おおつか　ひでゆき）

§1. はじめに

二項係数についての関係式は多く知られているが，その逆数和はあまり見かけない。本稿では二項係数の既知の結果と比較しながら，二項係数の逆数和について述べたい。

§2. 二項係数の逆数和 1（隣接する二項係数）

パスカルの三角形で隣接する二項係数の関係について，次の公式がよく知られている。

（公式 1） ${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}$

上記公式の左辺を逆数和に直したらどのようになるだろうか。

（定理 1）（I） $\dfrac{1}{{}_nC_r}+\dfrac{1}{{}_nC_{r+1}}\geqq\dfrac{4}{{}_{n+1}C_{r+1}}$

（II） $\dfrac{1}{{}_nC_r}+\dfrac{1}{{}_nC_{r+1}}>\dfrac{1}{{}_{n-1}C_r}$

（証明）

（I） $a>0$，$b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}\geqq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$ （相加平均≧調和平均）より

$$\frac{1}{{}_nC_r}+\frac{1}{{}_nC_{r+1}}\geqq2\times\frac{2}{{}_nC_r+{}_nC_{r+1}}=\frac{4}{{}_{n+1}C_{r+1}}$$

（II） $\dfrac{{}_{n-1}C_r}{{}_nC_r}+\dfrac{{}_{n-1}C_r}{{}_nC_{r+1}}$

$$=\frac{(n-1)!\,r!\,(n-r)!}{r!\,(n-1-r)!\,n!}+\frac{(n-1)!\,(r+1)!\,(n-r-1)!}{r!\,(n-1-r)!\,n!}$$

$$=\frac{n-r}{n}+\frac{r+1}{n}=\frac{n+1}{n}>1$$

$$\therefore\ \frac{1}{{}_nC_r}+\frac{1}{{}_nC_{r+1}}>\frac{1}{{}_{n-1}C_r}\quad\blacksquare$$

※定理 1 の（I），（II）の不等式は互いに独立な不等式である。

§3. 二項係数の逆数和 2

次の公式は二項係数の公式としてよく知られている。

（公式 2） $\displaystyle\sum_{k=r}^{n}{}_kC_r={}_{n+1}C_{r+1}$

上記公式の左辺を逆数和に直したらどのようになるだろうか。

（定理 2） $\displaystyle\sum_{k=r}^{n}\frac{1}{{}_kC_r}=\frac{r}{r-1}\left(1-\frac{1}{{}_nC_{r-1}}\right)$ $(r\geqq2)$

（証明）

$$\frac{{}_kC_r}{{}_{k-1}C_{r-1}}-\frac{{}_kC_r}{{}_kC_{r-1}}$$

$$=\frac{k!\,(r-1)!\,(k-r)!}{r!\,(k-r)!\,(k-1)!}-\frac{k!\,(r-1)!\,(k-r+1)!}{r!\,(k-r)!\,k!}$$

$$=\frac{k}{r}-\frac{k-r+1}{r}=\frac{r-1}{r}$$

$r\geqq2$ に注意して上の式を変形すると

$$\frac{1}{{}_kC_r}=\frac{r}{r-1}\left(\frac{1}{{}_{k-1}C_{r-1}}-\frac{1}{{}_kC_{r-1}}\right)$$

この等式を使って本題の不等式を証明する。

$$\sum_{k=r}^{n}\frac{1}{{}_kC_r}=\sum_{k=r}^{n}\frac{r}{r-1}\left(\frac{1}{{}_{k-1}C_{r-1}}-\frac{1}{{}_kC_{r-1}}\right)$$

$$=\frac{r}{r-1}\left\{\left(\frac{1}{{}_{r-1}C_{r-1}}-\frac{1}{{}_rC_{r-1}}\right)+\left(\frac{1}{{}_rC_{r-1}}-\frac{1}{{}_{r+1}C_{r-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{{}_{n-1}C_{r-1}}-\frac{1}{{}_nC_{r-1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{r}{r-1}\left(1-\frac{1}{{}_nC_{r-1}}\right)\quad\blacksquare$$

ここで，$n\to\infty$ とすれば ${}_nC_{r-1}\to\infty$ となるので，次の系が成り立つ。

（系） $\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty}\frac{1}{{}_kC_r}=\frac{r}{r-1}$ $(r\geqq2)$

§4. 二項係数の逆数和 3

次の公式は二項定理からすぐに得られる。

（公式 3） $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r = 2^n$

上記公式の左辺を逆数和に直したらどうなるだろうか。

直接求めるのは難しそう（不可能？）だが，不等式では次のように評価できる。

（定理 3） $\displaystyle\frac{2}{n-2} < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k} < \frac{2}{n-3}$ $(n \geqq 6)$

（証明）

（I） $\displaystyle\frac{2}{n-2} < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$ $(n \geqq 6)$ を示す。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k} \geqq \frac{2}{{}_n\mathrm{C}_1}+\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_2}+\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{2(n^2-n+1)}{n(n-1)(n-2)}$$
$$>\frac{2n(n-1)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{2}{n-2}$$

（II） $\displaystyle\frac{2}{n-3} > \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$ $(n \geqq 4)$ を示す。

$n=4$ のとき　左辺−右辺$\displaystyle=\frac{2}{1}-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_k}=\frac{4}{3}>0$

となり成立。

$n=5$ のとき　左辺−右辺$\displaystyle=\frac{2}{2}-\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_k}=\frac{2}{5}>0$

となり成立。

$n=6$ のとき　左辺−右辺$\displaystyle=\frac{2}{3}-\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{{}_6\mathrm{C}_k}=\frac{3}{20}>0$

となり成立。

$n \geqq 7$ のとき

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k} \leqq \frac{2}{{}_n\mathrm{C}_1}+\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_2}+\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_3}+\frac{n-7}{{}_n\mathrm{C}_4}$

(ii) $\displaystyle\frac{2}{n-3}-\left(\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_1}+\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_2}+\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_3}+\frac{n-7}{{}_n\mathrm{C}_4}\right)$

$$=\frac{2(n^2-17n+96)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \quad \cdots☆$$

ここで，（☆の分子）$\displaystyle=2\left(n-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{95}{2}>0$ となるので，☆は正になる。

すなわち $\displaystyle\frac{2}{n-3}>\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_1}+\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_2}+\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_3}+\frac{n-7}{{}_n\mathrm{C}_4}$

(i)(ii)より，$n \geqq 7$ のとき $\displaystyle\frac{2}{n-3}>\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$ は成り立つ。

以上から $\displaystyle\frac{2}{n-3}>\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$ $(n \geqq 4)$

したがって，（I）（II）より定理 3 は証明された。■

（参考）

n	$\frac{2}{n-2}$	$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_k}$	$\frac{2}{n-3}$
10	0.25	0.274603	0.285714
20	0.111111	0.112933	0.117647
100	0.020408	0.020417	0.020619

（東京都　元文教大学付属高等学校）