―数研通信62号を読んで―

垂足三角形の面積について

柳田（やなぎた）　五夫（いつお）

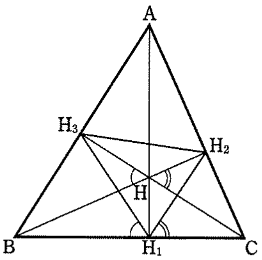
§0. はじめに

三角形 ABC の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線の足をそれぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$，$\mathrm{H_3}$ としたとき，三角形 $\mathrm{H_1H_2H_3}$ と三角形 ABC の面積比について，１年生から質問を受けたのでまとめてみた。八巻先生が数研通信 No.62 において，鋭角三角形のとき

$$\frac{\triangle \mathrm{H_1H_2H_3}}{\triangle \mathrm{ABC}}=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{\triangle \mathrm{H_1H_2H_3}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\frac{a^2(b^4+c^4-a^4)+b^2(c^4+a^4-b^4)+c^2(a^4+b^4-c^4)-2a^2b^2c^2}{4a^2b^2c^2} \quad \cdots\cdots②$$

を示していますが，②の分子を因数分解した式や，鈍角三角形の場合も考察してみた。



§1. △ABC が鋭角三角形の場合

（解１）

$$\frac{\triangle \mathrm{AH_3H_2}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AH_3}\cdot\mathrm{AH_2}\cdot\sin A}{\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cdot\sin A}$$

$$=\frac{b\cos A\cdot c\cos A}{bc}=\cos^2 A$$

同様にして $\dfrac{\triangle \mathrm{BH_1H_3}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\cos^2 B$，$\dfrac{\triangle \mathrm{CH_2H_1}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\cos^2 C$

が成り立つから

$$\triangle \mathrm{H_1H_2H_3}=\triangle \mathrm{ABC}-(\triangle \mathrm{AH_2H_3}+\triangle \mathrm{BH_1H_3}+\triangle \mathrm{CH_2H_1}) \quad \cdots\cdots(*)$$

よって

$$\frac{\triangle \mathrm{H_1H_2H_3}}{\triangle \mathrm{ABC}}=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C \quad \cdots\cdots①$$

を得る。

余弦定理から

$$\frac{\triangle \mathrm{H_1H_2H_3}}{\triangle \mathrm{ABC}}$$

$$=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2$$

$$=\frac{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-a^2)^2-b^2(c^2+a^2-b^2)^2-c^2(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2c^2}$$

ここで

$b^2+c^2-a^2=2A$，$c^2+a^2-b^2=2B$，$a^2+b^2-c^2=2C$

とおくと $a^2=B+C$，$b^2=C+A$，$c^2=A+B$ となるから分子を

$$P=4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-a^2)^2-b^2(c^2+a^2-b^2)^2$$
$$-c^2(a^2+b^2-c^2)^2$$

とおくと

$$P=4(B+C)(C+A)(A+B)-4A^2(B+C)$$
$$-4B^2(C+A)-4C^2(A+B)$$
$$=4\{2ABC+A^2(B+C)+B^2(C+A)$$
$$+C^2(A+B)-A^2(B+C)-B^2(C+A)$$
$$-C^2(A+B)\}$$
$$=8ABC$$

よって

$$\frac{\triangle \mathrm{H_1H_2H_3}}{\triangle \mathrm{ABC}}$$

$$=\frac{4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-a^2)^2-b^2(c^2+a^2-b^2)^2+c^2(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{8\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}{4a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2} \quad \cdots\cdots②'$$

（注１）　分子 P の因数分解は，a について整理してからでもできる。

$$P=-a^6+(b^2+c^2)a^4+(b^2-c^2)^2a^2-(b^6-b^4c^2-b^2c^4+c^6)$$
$$=a^4(b^2+c^2-a^2)+(b^2-c^2)^2a^2-\{b^4(b^2-c^2)-c^4(b^2-c^2)\}$$
$$=a^4(b^2+c^2-a^2)+\underline{(b^2-c^2)^2a^2-(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)}$$

$=a^4(b^2+c^2-a^2)+(b^2-c^2)^2\{a^2-(b^2+c^2)\}$
$=(b^2+c^2-a^2)\{a^4-(b^2-c^2)^2\}$
$=(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$

(注2) ②′を変形すると

$$\frac{\triangle H_1H_2H_3}{\triangle ABC}=2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=2\cos A\cos B\cos c \quad \cdots\cdots ③$$

となる。

①は③のように変形できることがわかったが，②′を経ないで，①から直接③を導いてもよい。

(解2) $Q=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$ とおくと

$$Q=1-\left(\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C\right)$$
$$=-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C$$
$$=-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$$
$$=\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C \quad (\because \cos C=-\cos(A+B))$$
$$=\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$$
$$=\cos C\cdot 2\cos A\cos B=2\cos A\cos B\cos C$$

(注3) $\cos C=\cos(180°-A-B)=\cos(A+B)$ に加法定理を用いて次のように証明することもできる。

$$Q=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2(A+B)$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)^2$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 A\cos^2 B$$
$$+2\cos A\cos B\sin A\sin B-\sin^2 A\sin^2 B$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 A\cos^2 B$$
$$+2\cos A\cos B\sin A\sin B-(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)$$
$$=-2\cos^2 A\cos^2 B+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$
$$=-2\cos A\cos B(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$$
$$=-2\cos A\cos B\cos(A+B)=2\cos A\cos B\cos C$$

§2. 鋭角三角形の場合の別解

H_1H_2，H_2H_3，H_3H_1 の長さや $\angle H_3H_1H_2$ の大きさが比較的簡単に求まるので，これらを利用して解くこともできる。(§0. の図参照)

(解3) $\triangle AH_3H_2$ に余弦定理を用いると

$$H_2H_3^2=AH_3^2+AH_2^2-2AH_3\cdot AH_2\cos A$$
$$=(b\cos A)^2+(c\cos A)^2$$
$$-2b\cos A\cdot c\cos A\cdot\cos A$$
$$=\cos^2 A(b^2+c^2-2bc\cos A)=a^2\cos^2 A$$
$$\therefore\ H_2H_3=a\cos A$$

同様にして $H_1H_2=c\cos C$，$H_3H_1=b\cos B$

3辺の長さが求まったので，$\angle H_3H_1H_2$ の大きさを求める。

$\angle HH_3A=\angle HH_2A=90°$ により，4点A，H_3，H，H_2 はAHを直径とする円周上にあるから

$\angle H_3HB=A$

また4点 H_3，B，H_1，H は同一円周上にあるから

$\angle H_3HB=\angle H_3H_1B$

よって $\angle H_3H_1B=A$

同様にして $\angle H_2H_1C=A$ が成り立つから

$\angle H_3H_1H_2=180°-2A$

これで $\triangle H_1H_2H_3$ の面積を求めることができる。

$$\triangle H_1H_2H_3=\frac{1}{2}\cdot H_1H_2\cdot H_1H_3\cdot\sin\angle H_3H_1H_2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot c\cos C\cdot b\cos B\cdot\sin(180°-2A)$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin 2A\cos B\cos C$$
$$=\frac{1}{2}bc\cdot 2\sin A\cos A\cdot\cos B\cos C$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin A\cdot 2\cos A\cos B\cos C$$
$$=2\triangle ABC\cdot\cos A\cos B\cos C$$

(注4) 平面図形を習ったばかりの1年生から，垂足三角形の面積について質問を受けたので，解1か解3が適切かもしれない。ただし，解3の場合には

$\sin 2A=2\sin A\cos A \quad (0°<A<90°)$

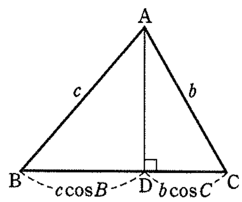
あるいは，加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ④$$
$$(0°<\alpha<90°,\ 0°<\beta<90°)$$

を証明しておかなければならないだろう。([2]参照)

ここでは，後者を示しておく。

B，Cが鋭角のとき



$a=(DC+BD=)b\cos C+c\cos B \quad \cdots\cdots ⑤$

が成り立つ。[第1余弦定理]

正弦定理より

$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

が成り立つから，これらを⑤に代入すると

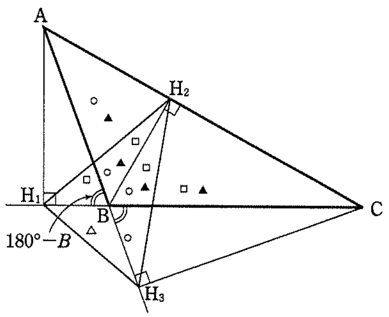
$2R\sin A=2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B$

$\therefore\ \sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$\sin A=\sin(180°-B-C)=\sin(B+C)$ だから
$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$
この式で B，C をα，β に書き換えれば④を得る。
④で $\alpha=\beta=A$ とおくと $\sin 2A=2\sin A\cos A$ が得られる。
$\sin 2A=2\sin A\cos A$ $(0°<A<90°)$ の証明を1年生の課題にすると興味深い解答が期待できそうである。

§3. △ABCが鈍角三角形の場合

∠Bが鈍角として一般性を失わない。



$$\triangle H_1H_2H_3=(\overset{\bigcirc}{\triangle AH_2H_3}+\overset{\triangle}{\triangle BH_1H_3}+\overset{\square}{\triangle CH_2H_1})-\overset{\blacktriangle}{\triangle ABC}$$

で(＊)と符号が逆で，

$$\frac{\triangle BH_1H_3}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot a\cos(180°-B)\cdot c\cos(180°-B)\sin B}{\frac{1}{2}ca\sin B}$$
$$=\cos^2 B$$

等が成り立つから

$$\frac{\triangle H_1H_2H_3}{\triangle ABC}=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1$$
$$=-2\cos A\cos B\cos C$$

となる。

§4. おわりに

△ABCで成り立つ関係式
$1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C=2\cos A\cos B\cos C$
は，次の2002年の京大・理系の問題を解くのに，正弦定理を用いると現れる。

> 半径1の円周上に相異なる3点A，B，Cがある。
> (1) $AB^2+BC^2+CA^2>8$ ならば△ABCは鋭角三角形であることを示せ。
> (2) $AB^2+BC^2+CA^2\leqq 9$ が成立することを示せ。また，この等号が成立するのはどのような場合か。
>
> 〔2002　京都大・理系〕

外接円の半径が1であるから，正弦定理より
$AB=2\sin C$，$BC=2\sin A$，$CA=2\sin B$

$$AB^2+BC^2+CA^2=4(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$
$$=4(2+1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C)$$
$$=\cdots\cdots$$
$$=4(2+2\cos A\cos B\cos C)$$
$$=8+8\cos A\cos B\cos C \quad \cdots\cdots⑥$$

(1)は $\cos A\cos B\cos C>0$ のときである。これから△ABCは鋭角三角形であることがわかる。

(2)△ABCが直角三角形か鈍角三角形のときは $\cos A\cos B\cos C\leqq 0$ が成り立つから⑥より $AB^2+BC^2+CA^2\leqq 8$ となる。

△ABCが鋭角三角形のときは，

$$f(x)=\log(\cos x)\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

$$f'(x)=-\tan x,\ f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}<0$$

となり，$y=f(x)$ のグラフは上に凸であるから

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}\leqq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

(等号は $A=B=C$ のとき成立)

$$\therefore\ \frac{\log(\cos A\cos B\cos C)}{3}\leqq\log\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos A\cos B\cos C\leqq\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3=\frac{1}{8}$$

したがって⑥より $AB^2+BC^2+CA^2\leqq 9$ が成立する。

また，等号が成り立つのは $A=B=C$ より△ABCが正三角形のときである。

《参考文献》

〔1〕 八巻　専文，たかが三角形，されど三角形
数研通信　数学 No.62，数研出版
〔2〕 池内　仁史，三角関数の加法定理のいろいろな証明方法
数研通信　数学 No.62，数研出版

(栃木県立真岡高等学校)