「三角形の面積」についての一考察

米江（よねえ）　慶典（よしのり）

§1. はじめに

高等学校における「三角形の面積」についての学習内容は，大学入試をはじめとして基礎となる指導事項の一つです。ここで，少し考えてみたいと思います。

§2. 基礎定理

「三角形の面積」に関する基礎的な定理を準備します。

【定理 1】　三角形の面積 I

> 三角形の面積を S とする。
>
> (1)　2 辺の長さを $a\ (=|\vec{a}|)$，$b\ (=|\vec{b}|)$ とし，その間の角を $\theta(0<\theta<\pi)$ とするとき
>
> $$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$
>
> (2)　$\triangle$OAB について
>
> $$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$
>
> (3)　3 頂点の座標が $(0,\ 0)$，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ のとき
>
> $$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$
>
> (4)　3 頂点の座標が $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ のとき
>
> $$S=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)|$$

(証明)　(1)　θ が鋭角，直角，鈍角の場合について示せばよい。

(2)　(1)と内積の定義から直ちに証明される。

(3)　(2)において，$\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2)$ とすればよい。

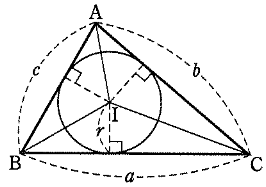
(4)　(3)から直ちに証明される。　終

(補足)　(2)は空間図形においても適用できる。

【定理 2】　三角形の面積 II

> 3 辺の長さが a，b，c である三角形 ABC の面積 S は，この三角形の外接円の半径および内接円の半径をそれぞれ R，r とするとき
>
> (1)　$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=rs$
>
> ただし，　$s=\dfrac{a+b+c}{2}$
>
> (2)　$S=\dfrac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$　(一辺とその両端の角が与えられている)
>
> (3)　$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$
>
> (4)　$S=\dfrac{abc}{4R}$

(証明)　$A+B+C=\pi$ のもとで考える。



(1)　$\triangle$ABC の内心を I とおくと

$\triangle$ABC
$=\triangle$IAB$+\triangle$IBC$+\triangle$ICA

が成り立つことから直ちに証明される。

(2)，(3)，(4)

正弦定理と定理 1 の(1)から直ちに証明される。　終

【定理 3】　三角形の面積 III　(ヘロンの公式)

> 3 辺の長さが a，b，c である三角形 ABC の面積 S は
>
> $$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
>
> ただし，　$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

(証明)　$\sin^2A=1-\cos^2A=(1+\cos A)(1-\cos A)$

$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4b^2c^2}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ 終

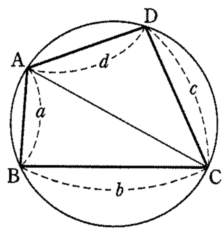
§3. 考察

幾つかの定理を前述の定理を用いて考えます。

定理 4 は，一般的に教科書では具体的な数値を与え，定理 6 の(1)との融合で紹介していることが多いです。

【定理 4】 円に内接する四角形の面積

4 辺の長さが a，b，c，d である四角形 ABCD が円に内接しているとき，この四角形 ABCD の面積 S は



$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

ただし，$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$

(証明) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin B+\dfrac{1}{2}cd\sin D$

$$=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-B)$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin B$$

$$=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B$$

両辺を 2 乗して

$$4S^2=\sin^2 B(ab+cd)^2=(1-\cos^2 B)(ab+cd)^2$$

$$=(1+\cos B)(1-\cos B)(ab+cd)^2 \quad\cdots\cdots\text{①}$$

ここで $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B$,

$AC^2=c^2+d^2+2cd\cos B$

よって $a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$

$$\therefore\quad \cos B=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)} \quad\cdots\cdots\text{②}$$

あとは，②を①へ代入して整理すればよい。

$$4S^2=\left\{1+\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}\right\}\times\left\{1-\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}\right\}(ab+cd)^2$$

$$=\frac{\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}}{4}$$

$$=\frac{(2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)}{4}$$

$$=4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$ 終

定理 5 は，三角関数の基礎知識も使い証明できます。

【定理 5】 三角形とその外接円および内接円に関する諸定理

3 辺の長さが a，b，c である三角形 ABC の面積を S，この三角形の外接円の半径および内接円の半径をそれぞれ R，r とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とするとき

(1) $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

(2) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(3) $s=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(4) $S=\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}$

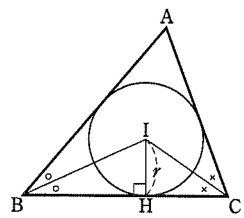
(証明) $A+B+C=\pi$ のもとで考える。

(1) 定理 2 の(1)と定理 3 より

$(S=)rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore\quad r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

(2) △ABC の内心を I とし，I から BC に下ろした垂線の足を H とする。



このとき，正弦定理より

$BH+HC=BC$

$=2R\sin A$

ここで $BH=\dfrac{r}{\tan\dfrac{B}{2}}$，$HC=\dfrac{r}{\tan\dfrac{C}{2}}$

であるから

$$\frac{r}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{r}{\tan\frac{C}{2}}=2R\sin A$$

$$\therefore\quad r=2R\sin A\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\left[\because\quad \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}=\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\right]$$

(3) $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\left\{\left(\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)+\left(\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}\right)+\left(\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}\right)\right\}$$

$$=\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\times\left(\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)\quad(\because\ (2))$$

$$=\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\times\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$=4R\left\{\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right\}$$

$$=4R\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=4R\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=4R\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right\}$$

$$=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(4) (1)と定理 3 より

$$rS=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=(s-a)(s-b)(s-c)$$

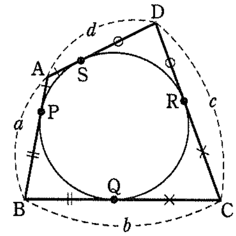
終

定理 6 の証明は，次の補題を準備してから入ります。

【補題】 「接線の長さ」に関する定理

> 円に外接する四角形の向かい合う辺の長さの和は，他の向かい合う辺の長さの和に等しい。

(証明) 図のように四角形 ABCD が点 P, Q, R, S で円に接し，AB$=a$, BC$=b$, CD$=c$, AD$=d$ とおく。



このとき，AB, AD は円に接するから

$$\text{AP}=\text{AS}$$

同様に

$$\text{BP}=\text{BQ}$$
$$\text{CQ}=\text{CR}$$
$$\text{DR}=\text{DS}$$

よって

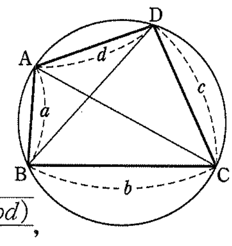
$$a+c=b+d$$

終

(補足) 円の外部の点から円に接線を引いたとき，外部の点と接点の間の距離を 接線の長さ という。

【定理 6】 円に内接する四角形に関する諸定理

> 4 辺の長さが a, b, c, d である四角形 ABCD が円に内接しているとき
>
> (1) 対角線の長さは
>
> $$\text{AC}=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}},$$
>
> $$\text{BD}=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$
>
> (2) さらにこの四角形が他の円に外接しているとき，この四角形 ABCD の面積 S は
>
> $$S=\sqrt{abcd}$$



(証明) (1) $\angle$ADC$=\theta$ とする。このとき，$\triangle$ABC と $\triangle$ADC に余弦定理を適用して

$$\text{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\theta)$$
$$=a^2+b^2+2ab\cos\theta \quad\cdots\cdots①$$
$$\text{AC}^2=c^2+d^2-2cd\cos\theta \quad\cdots\cdots②$$

①$\times cd+$②$\times ab$ より

$$(ab+cd)\text{AC}^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$$

$$\therefore\quad (ab+cd)\text{AC}^2=(ad+bc)(ac+bd)$$

よって，AC>0 であるから

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

$$\mathrm{BD}=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$ も同様。

(2) この四角形が他の円に外接しているので，補題から

$$a+c=b+d$$

よって，定理 4 において

$$s=a+c=b+d$$

$$\therefore\quad s-a=c,\ s-b=d,\ s-c=a,\ s-d=b$$

$$\therefore\quad S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$=\sqrt{c\cdot d\cdot a\cdot b}=\sqrt{abcd}$$ 終

(補足) (1) から

$$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

$$=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\times\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

$$=\sqrt{(ac+bd)^2}$$

$$=ac+bd$$

$$=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}$$

となり，トレミーの定理を導くことができる。

最後に，次の定理を述べます。証明の過程で「相加平均と相乗平均の大小関係」を用いるなど興味深い定理といえます。

【定理 7】 一つの三角形の外接円の半径と内接円の半径との関係

> 一つの三角形の外接円の半径および内接円の半径をそれぞれ R，r とするとき
>
> $R\geqq 2r$
>
> が成り立つ。

三角形を ABC とし，3 辺の長さを a，b，c とする。また，$A+B+C=\pi$ のもとで考える。

(証明 1) ヘロンの公式の利用

△ABC の面積 S は，定理 2 の(1)，(3)から，R，r のそれぞれを用いて

$$S=\frac{abc}{4R},\quad S=\frac{r(a+b+c)}{2}$$

と表せることから $\dfrac{r}{R}=\dfrac{8S^2}{abc(a+b+c)}$

よって，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，ヘロンの公式より

$$\frac{r}{R}=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc\cdot 2s}$$

$$=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$

ここで 2 変数の相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{a}{2}=\frac{2s-b-c}{2}=\frac{(s-b)+(s-c)}{2}\geqq\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

である。

同様に $\dfrac{b}{2}\geqq\sqrt{(s-c)(s-a)}$，$\dfrac{c}{2}\geqq\sqrt{(s-a)(s-b)}$

であるから，辺々を掛け合わせると

$$(s-a)(s-b)(s-c)\leqq\frac{abc}{8}$$

が得られるので $\dfrac{r}{R}\leqq\dfrac{1}{2}$ すなわち $R\geqq 2r$

が得られる。等号成立は

$$s-a=s-b=s-c$$

すなわち $a=b=c$

のときである (三角形が正三角形のとき)。 終

(証明 2) 定理 5 の(2)からの考察

定理 5 の(2)から

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad\cdots\cdots①$$

よって $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{1}{8}$ を示せばよい。

Aを固定して考えると，$A+B+C=\pi$ であるから

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

(等号成立は $B=C$ のとき)

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

となる。あとは，Aの関数とみればよい。

$\sin\dfrac{A}{2}=t$ とおき $f(t)=t(1-t)$ を考える。

2 変数関数の相加平均と相乗平均の大小関係より

$$t+(1-t)\geqq 2\sqrt{t(1-t)}\ (>0)$$

$$\therefore\quad \{t+(1-t)\}^2\geqq 4t(1-t)\quad\therefore\quad t(1-t)\leqq\frac{1}{4}$$

よって，証明された。等号成立は

$$t=1-t\quad\therefore\quad t=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$$

$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $A=\dfrac{\pi}{3}$

これと $B=C$ とから

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

のときである (三角形が正三角形のとき)。 終

(補足)　$f(t) \leqq \dfrac{1}{4}$ の証明は当然，平方完成でもできる。

(証明3)　ヘロンの公式を利用しない

正弦定理と定理2の(1)，(3)から

$$\frac{1}{2}(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)r$$
$$=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

したがって　$\dfrac{r}{R}=4\cdot\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}$　……②

となる。

$$\sin A+\sin B+\sin C$$
$$=\sin A+\sin B+\sin\{\pi-(A+B)\}$$
$$=\sin A+\sin B+\sin(A+B)$$
$$=(\sin A+\sin B)+\sin\left(2\cdot\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=2^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin A\sin B\sin C$$
$$=2^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

よって，②から

$$\frac{r}{R}=4\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}$$
$$=4\cdot\frac{2^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cdot 2^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$
$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

となり，①に帰着される。以下は，(証明2)と同様である。　終

(証明4)　3変数の相加平均と相乗平均の大小関係と正弦の凸性を利用する

$\sin A$，$\sin B$，$\sin C>0$ より

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\geqq\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

したがって

$$\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3\geqq\sin A\sin B\sin C \quad ……③$$

いま　$\dfrac{r}{R}=\dfrac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$$\leqq\frac{2\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3}{\sin A+\sin B+\sin C}\quad (\because\ ③)$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^2$$

ここで“$y=\sin x$ のグラフは $0<x<\pi$ で上に凸”　……ⓐ

だから

$$(0<)\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqq\sin\frac{A+B+C}{3}$$

よって

$$\frac{r}{R}\leqq\frac{2}{3}\cdot\left(\sin\frac{A+B+C}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$　終

(補足)　(証明4)において，ⓐは明らかとした。

§4. 最近の大学入試問題

定理7において，特に，$R=1$ の場合が京都大学で出題されています。

> 平面上の点Oを中心とし半径1の円周上に相異なる3点A，B，Cがある。△ABCの内接円の半径 r は $\dfrac{1}{2}$ 以下であることを示せ。
>
> 〔2006年(平成18年)京都大後期(理系)第4問〕

§5. おわりに

「三角形の面積」を考える上で，正弦定理の応用のよさを挙げなければなりません。指導の場面においても正弦定理をとり扱う三角比は“長さと角度の換算”と考えれば，生徒にとっては身近なものとして捉えることができると思います。ご意見いただければ幸いです。

《参考文献》

〔1〕『改訂版　数学Ⅰ』数研出版株式会社
〔2〕『改訂版　数学A』数研出版株式会社
〔3〕『改訂版　数学B』数研出版株式会社
〔4〕岸正倫 著『微分積分学』学術図書出版社

(鳥取県立米子東高等学校)