内接四角形のある性質

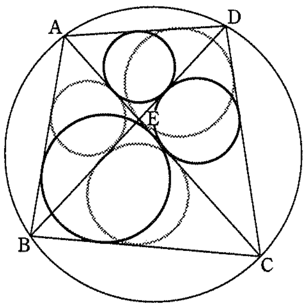
久米　秀夫

§0. はじめに

もう20年以上も前になりますが，円に内接する四角形に関してある性質が成り立つことに気づきました。すでに知られている性質ではないかと思い，機会あるごとに調べていましたが，今のところ確認できておりません。この機会にその性質を公表して，みなさんのご教示をお願いしたいと思います。

§1. 性質

円に内接する任意の四角形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を E とする。



三角形 ABC，ADE，CDE の内接円の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とし，三角形 ACD，ABE，BCE の内接円の半径をそれぞれ R_1，R_2，R_3 とすると

$$r_1+r_2+r_3=R_1+R_2+R_3$$

が成り立つ。

§2. 証明

AB$=a$，BC$=b$，CD$=c$，DA$=d$ とする。

また，△ABC の面積を S，線分 BE の長さを p とする。

このとき，次の各三角形の面積は S を用いて

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{cd}{ab}S,\ \triangle\mathrm{ABE}=\frac{ad}{ad+bc}S,$$

$$\triangle\mathrm{BCE}=\frac{bc}{ad+bc}S,\ \triangle\mathrm{ADE}=\frac{cd^2}{b(ad+bc)}S,$$

$$\triangle\mathrm{CDE}=\frac{c^2d}{a(ad+bc)}S$$

と表される。

ちなみに

$$S=\frac{ab\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}}{4(ab+cd)}$$

である。

さらに，次の各線分の長さを p を用いて表すと

$$\mathrm{AE}=\frac{d}{b}p,\ \mathrm{DE}=\frac{cd}{ab}p,\ \mathrm{CE}=\frac{c}{a}p$$

と表される。

ここで

$$p=\frac{ab}{ab+cd}\sqrt{\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}}$$

である。

次に，三角形の面積とその内接円の半径との関係を用いて，それぞれの内接円の半径を S，p，a，b，c，d で表すと

$$r_1=\frac{2ab}{ab(a+b)+(ad+bc)p}S$$

$$r_2=\frac{2acd}{(ad+bc)\{ab+(a+c)p\}}S$$

$$r_3=\frac{2bcd}{(ad+bc)\{ab+(b+d)p\}}S$$

$$R_1=\frac{2cd}{ab(c+d)+(ad+bc)p}S$$

$$R_2=\frac{2abd}{(ad+bc)\{ab+(b+d)p\}}S$$

$$R_3=\frac{2abc}{(ad+bc)\{ab+(a+c)p\}}S$$

ここで，S と 2 はすべてに共通であるから，それぞれの内接円の半径を $2S$ で割ったものを，改めて r_1'，r_2'，r_3'，R_1'，R_2'，R_3' とおくと

$$r_1'+r_2'+r_3'=R_1'+R_2'+R_3'$$

を示せばよい。

分母に注目して，$r_1'-R_1'=R_2'-r_3'+R_3'-r_2'$ を示そう。

(左辺)$=r_1'-R_1'$

$$=\frac{ab}{ab(a+b)+(ad+bc)p}-\frac{cd}{ab(c+d)+(ad+bc)p}$$

$$=\frac{ab\{ab(c+d)+(ad+bc)p\}-cd\{ab(a+b)+(ad+bc)p\}}{\{ab(a+b)+(ad+bc)p\}\{ab(c+d)+(ad+bc)p\}}$$

$$=\frac{ab(abc+abd-acd-bcd)+(ad+bc)(ab-cd)p}{\{ab(a+b)+(ad+bc)p\}\{ab(c+d)+(ad+bc)p\}}$$

$(右辺)=R_2'-r_3'+R_3'-r_2'$

$$=\frac{abd}{(ad+bc)\{ab+(b+d)p\}}-\frac{bcd}{(ad+bc)\{ab+(b+d)p\}}$$
$$+\frac{abc}{(ad+bc)\{ab+(a+c)p\}}-\frac{acd}{(ad+bc)\{ab+(a+c)p\}}$$
$$=\frac{1}{ad+bc}\left\{\frac{ac(b-d)}{ab+(a+c)p}+\frac{bd(a-c)}{ab+(b+d)p}\right\}$$
$$=\frac{1}{ad+bc}\cdot\frac{ab(ac(b-d)+bd(a-c))+(ac(b^2-d^2)+bd(a^2-c^2))p}{\{ab+(a+c)p\}\{ab+(b+d)p\}}$$
$$=\frac{1}{ad+bc}\cdot\frac{ab(abc-acd+abd-bcd)+(ad+bc)(ab-cd)p}{\{ab+(a+c)p\}\{ab+(b+d)p\}}$$

ここで，左辺と右辺の分子は等しいから，それぞれの分母

$$\{ab(a+b)+(ad+bc)p\}\{ab(c+d)+(ad+bc)p\}$$

と $(ad+bc)\{ab+(a+c)p\}\{ab+(b+d)p\}$ が等しいことを示せばよい。

$$\{ab(a+b)+(ad+bc)p\}\{ab(c+d)+(ad+bc)p\}$$
$$-(ad+bc)\{ab+(a+c)p\}\{ab+(b+d)p\}$$
$$=a^2b^2(a+b)(c+d)+ab(a+b+c+d)(ad+bc)p$$
$$+(ad+bc)^2p^2-a^2b^2(ad+bc)$$
$$-ab(a+b+c+d)(ad+bc)p$$
$$-(ad+bc)(a+c)(b+d)p^2$$
$$=a^2b^2(ac+bd)-(ad+bc)(ab+cd)p^2$$
$$=a^2b^2(ac+bd)-(ad+bc)(ab+cd)\cdot\frac{a^2b^2}{(ab+cd)^2}\cdot\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}$$
$$=a^2b^2(ac+bd)-\frac{a^2b^2}{ab+cd}\{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)\}$$
$$=\frac{a^2b^2}{ab+cd}\{(ac+bd)(ab+cd)-bc(a^2+d^2)-ad(b^2+c^2)\}$$
$$=0$$

以上より

$$r_1+r_2+r_3=R_1+R_2+R_3$$

が成り立つ。　(証明終り)

§3. おわりに

言うまでもありませんが，△ABD，△BCDの三角形の内接円の半径についても同様のことが成り立ちます。

力づくの証明しかできませんでしたが，きれいな証明があるのかも知れません。

(大阪国際大和田高等学校)