3 次元空間における 1 次変換による不動直線 [I]

石濱　文武

§1. はじめに

本稿では標記の話題を提供します。

直線 $\ell : x-2=\dfrac{y-2}{-1}=z-1=t$ に

行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

で表される 1 次変換をほどこしてみます。

例えば，$t=1$ に対する ℓ 上の点 $(3,\ 1,\ 2)$ の像は $(0,\ 4,\ -1)$ で，これは ℓ 上にあります $(t=-2)$。

ℓ 上の任意の点 $(t_0+2,\ -t_0+2,\ t_0+1)$ の像は $(t_0-1,\ -t_0+5,\ t_0-2)$ となりますが，これは ℓ 上にあります $(t=t_0-3)$。

逆に ℓ 上の任意の点 $(t+2,\ -t+2,\ t+1)$ は ℓ 上に原像 $(t+5,\ -t-1,\ t+4)$ をもつので，直線 ℓ は行列 A の表す 1 次変換による不動直線です。

§2. 3 次正方行列 A による不動直線

> [問題]　3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
>
> とする。
>
> 1 次変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
>
> で自分自身に移される直線(不動直線)を求めよ。

[解] (i) [原点を通る不動直線]

直線のベクトル方程式を

$$\vec{p}=t\vec{d} \quad (t \text{ は実数の変数，} \vec{d}\neq\vec{0}) \tag{1.1}$$

とする。この直線の像は

$$A\vec{p}=t(A\vec{d}) \tag{1.2}$$

であるから，これらの 2 直線が一致する条件は，それぞれの方向ベクトルが平行であること，すなわち

$$A\vec{d}=k\vec{d} \quad (k \text{ は実数で } k\neq 0) \tag{1.3}$$

が成立することである。これを変形すると

$$(A-kE)\vec{d}=\vec{0} \quad (E \text{ は単位行列}) \tag{1.4}$$

となる。したがって $\vec{d}\neq\vec{0}$ より

行列式について $det(A-kE)=0$ すなわち

$$\begin{vmatrix} -2-k & 0 & 3 \\ 0 & 2-k & 1 \\ 0 & -1 & -k \end{vmatrix}=0$$

が成立する。変形すると

$$(k-1)^2(k+2)=0$$

$$k=1\ (2 \text{ 重解}),\quad k=-2$$

を得る。以下で

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \text{とおく。}$$

$k=1$ のとき

(1.4) より

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1=-d_2=d_3$$

となり，$\vec{d}$ は $\vec{0}$ でない方向ベクトルであるから

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

としてよい。線型代数学の用語を使えば

A の固有値 1 に対する固有ベクトルが $\vec{d}$ であり，固有空間の次元は 1 である。

これで，原点を通る不動直線が 1 本定まった。方程式を x，y，z で表示すると

$$x=-y=z \tag{1.6}$$

となる。

$k=-2$ のとき

(1.4) より

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_2=d_3=0$$

となり，$\vec{d}$ は $\vec{0}$ でない方向ベクトルであるから

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

としてよい。したがって，原点を通る2本目の不動直線の方程式の x，y，z 表示は

$$y=z=0 \quad (x\text{軸}) \tag{1.8}$$

となる。

(ii) [原点を通らない不動直線]

$$\vec{p}=\vec{c}+t\vec{d} \quad (\vec{c}\text{ と }\vec{d}\text{ は1次独立}) \tag{2.1}$$

とおく。この直線の像は

$$A\vec{p}=A\vec{c}+t(A\vec{d}) \tag{2.2}$$

であるから，これらの2直線が一致する条件は

$$A\vec{d}\,/\!/\,\vec{d} \quad (\text{平行}) \tag{2.3}$$

(2.2) 上の点 $C'(A\vec{c})$ が (2.1) 上にある　(2.4)

が成立することである。

条件 (2.3) は (1.3) と同一だから $\vec{d}$ は (1.5) または (1.7) である。条件 (2.4) より

$$A\vec{c}=\vec{c}+t\vec{d}$$

$$(A-E)\vec{c}=t\vec{d} \tag{2.5}$$

以下で，$\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ とおく。

$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ($k=1$) のとき

$$(1.4)\text{ より}\quad (A-E)\vec{d}=\vec{0} \tag{2.6}$$

(2.5) の左側から $A-E$ を掛けて

$$(A-E)^2\vec{c}=t(A-E)\vec{d} \tag{2.7}$$

(2.6)，(2.7) より

$$(A-E)^2\vec{c}=\vec{0} \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix}9&-3&-12\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$-3c_1+c_2+4c_3=0$$

したがって，点 $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ は

$$\text{平面}\quad -3x+y+4z=0 \tag{2.9}$$

上にある。これは条件 (2.5) を満たす。

以上のことと，$\vec{c}$ と $\vec{d}$ が1次独立であることから，原点を通らない不動直線が1種類定まった。すなわち

平面 (2.9) 上の点を通り

ベクトル (1，-1，1) に平行な直線

ただし，直線 (1.6) を除く　(2.10)

なお，平面 (2.9) の法線ベクトル (-3，1，4) とベクトル (1，-1，1) は垂直なので直線 (2.10) はすべて平面 (2.9) に含まれる。また，(2.8) で定まった $\vec{c}$ は固有値1に対する広義固有ベクトルで，広義固有空間の次元は2である。

$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ($k=-2$) のとき

$$(1.4)\text{ より}\quad (A+2E)\vec{d}=\vec{0} \tag{2.11}$$

(2.5) の左側から $A+2E$ を掛けて

$$(A+2E)(A-E)\vec{c}=t(A+2E)\vec{d} \tag{2.12}$$

(2.11)，(2.12) より

$$(A+2E)(A-E)\vec{c}=\vec{0} \tag{2.13}$$

$$\begin{pmatrix}0&-3&-3\\0&3&3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$c_2+c_3=0$$

したがって，点 $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ は

$$\text{平面}\quad y+z=0 \tag{2.14}$$

上にある。これは条件 (2.5) を満たす。

以上のことと，$\vec{c}$ と $\vec{d}$ が1次独立であることから，原点を通らない不動直線がもう1種類定まった。

すなわち

平面 (2.14) 上の点を通り，

ベクトル (1，0，0) に平行な直線

ただし，直線 (1.8) を除く　(2.15)

なお，平面 (2.14) の法線ベクトル (0，1，1) とベクトル (1，0，0) は垂直なので直線 (2.15) はすべて平面 (2.14) に含まれる。

(i)，(ii)より次のことが示された。

> [問題]の解 (結果)
>
> 平面 $-3x+y+4z=0$ 上の点を通り
>
> ベクトル (1，-1，1) に平行な直線
>
> および
>
> 平面 $y+z=0$ 上の点を通り
>
> ベクトル (1，0，0) に平行な直線

§3. おわりに

1次変換による不動平面も考えられます。求め方は容易で，本稿の変換の場合は，2平面 (2.9)，(2.14) です。

今回は空間における不動直線という問題を提示することを目的にしましたので，具体例を考究しました。理論的な考究，特に不動直線をもつ変換に対応する行列の条件を調べることは次稿にまわします。

(神奈川県立湘南高等学校)