$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{P}_k$ の値と e が無理数であることの関係

久末(ひさすえ)　正樹(まさき)

§1. はじめに

$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n$ は二項定理による展開公式

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$$

に $x=1$ を代入して得られるものとしてよく知られている等式ですが，$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{P}_k$ の値はどの本を調べてみても載ってなかったので考えてみました。Napier の数 e が無理数であることの証明と関連付けて求めることができるようです。

e が無理数であることは L.Euler が1744年初めて証明し，1873年に C.Hermite によって e が超越数であることが証明されました。e の性質については，大学入試においても過去に鹿児島大学や名古屋市立大学などで出題されています。今回は1997年の大阪大学後期入試問題を利用します。

§2. 1997年大阪大学後期入試問題より

自然数 n に対して関数 $f_n(x)=x^n e^{1-x}$ とその定積分 $a_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ であることを示し，さらに $0<a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2) a_1 を求めよ。$n>1$ に対して a_n と a_{n-1} の間の漸化式を求めよ。

(3) 自然数 n に対して等式 $\dfrac{a_n}{n!}=e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(4) いかなる自然数 n に対しても，$n!e$ は整数とならないことを示せ。

[解答]　(1)　$0<x<1$ では

$f_n'(x)=x^{n-1}e^{1-x}(n-x)>0$ であるから $f_n(x)$ は単調増加し，$0=f_n(0) \leqq f_n(x) \leqq f_n(1)=1$

また $0<x<1$ では $0<f_n(x)<1$ であるから

$0=\int_0^1 0\,dx<\int_0^1 f_n(x)\,dx<\int_0^1 1\,dx=1$　よって $0<a_n<1$

(2)　$a_1=\int_0^1 x(-e^{1-x})'\,dx$

$$=\Big[x(-e^{1-x})\Big]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}\,dx=e-2$$

$a_n=\int_0^1 x^n(-e^{1-x})'\,dx$

$$=\Big[x^n(-e^{1-x})\Big]_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}\,dx=-1+na_{n-1}$$

よって $a_n=na_{n-1}-1$ ……①

(3)　①の両辺を $n!$ で割ると $\dfrac{a_n}{n!}-\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=-\dfrac{1}{n!}$

よって数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n!}\right\}$ について $n \geqq 2$ のとき

$\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_1}{1!}-\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{(k+1)!}$　(2)から $a_1=e-2$ を代入して

$$\frac{a_n}{n!}=e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

が成り立つ。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(4)　(3)の結果に $n!$ を掛けると

$$a_n=n!\,e-\left(n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots\cdots+\frac{n!}{n!}\right)$$

ここで右辺の括弧内の各項は整数で，(1)より $0<a_n<1$ だから $n!e$ は整数とはならない。

[解答終わり]

§3. $\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{P}_k$ の考察

(3)の等式において $n\to\infty$ とすると，(1)より $0<a_n<1$ であるからはさみうちの原理により左辺は 0 に収束し，$e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots\cdots$ が得られ，Napier の数の定義式を得ることができます。

また(4)の結果により e が無理数であることがわか

ります。実際，e が有理数だとすると互いに素な正の整数 m，n に対し $e=\dfrac{m}{n}$ と書け，このとき $n!e$ は整数になってしまうので(4)に矛盾し，よって e が無理数であると結論づけることができます。

さらに(1)と(3)より

$$0<a_n=n!e-n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)<1$$

であるから $n!e-1<n!\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$

$<n!e$ となり，

$$n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

は整数で，一方(4)より $n!e$ は整数ではないので，

$$n!e-a_n=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)=[n!e]$$

が得られます。ただし，[ ] は Gauss 記号です。つまり a_n は $n!e$ の小数部分になります。ところで，

$$n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

は一体何でしょうか。この式を変形してみると，

$$n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

$$=n!\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots\cdots+\frac{1}{1!}+1\right)$$

$$=n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k$$

となります。つまり上記で得られた式は

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k=[n!e]$$

なのです。$n=0$ のときは $\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k={}_0\mathrm{P}_0=1$ となります。以上をまとめると，e が無理数であることの証明の副産物として次の公式を得ることができました。

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k=\begin{cases}[n!e] & (n\geqq 1)\\ 1 & (n=0)\end{cases}}$$

§4. 終わりに

Napier の数の定義式 $e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$ を認めてしまえば

$$n!e=\left(n!+\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}\right)+\frac{n!}{(n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

$$<\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k+\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k+\frac{1}{n}$$

であるから

$$n!e-1\leqq n!e-\frac{1}{n}<\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k$$

また

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)<n!e$$

となるので

$$n!e-1<\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k<n!e$$

よって， $\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k=[n!e]$

を得ることができます。

$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k$ の値を求めることは“気づいてしまえば”大した話ではありませんが，高校生向けに Napier の数の定義式を利用せずにもっと簡略的な求め方があればご教示いただきたいと思います。

(岐阜県立多治見北高等学校)