自然数の平方和

大塚（おおつか） 秀幸（ひでゆき）

§1. はじめに

（自然数の平方和の公式）

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdots\cdots(☆)$$

教科書では $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を利用し，k に 1 から n まで代入して公式(☆)を導くのが普通である。その他にも様々な証明が知られている。本稿では，自分なりに考えた証明法をまとめた。

§2. 証明（その1，その2）

数の総和を 2 通りで表すことにより，公式(☆)の証明をしてみよう。まずは次の補題を示す。

（補題1） $1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n^2$

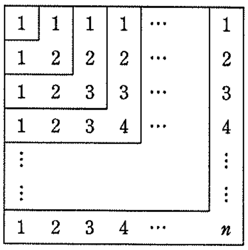
（補題1の証明）

$$左辺=\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2 \quad ■$$

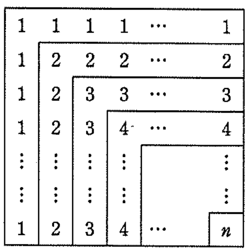
これは，以下に示す 2 つの証明の鍵となる。

（(☆)の証明（その1））

下の図のように数を並べその総和について考える。



総和$\cdots\sum_{k=1}^{n} k^2$（∵補題1）



総和$\cdots\sum_{k=1}^{n} k(2n+1-2k)$

左の図と右の図は仕切り方が違うだけで総和は等しいので，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n} k(2n+1-2k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=(2n+1)\sum_{k=1}^{n} k-2\sum_{k=1}^{n} k^2$$

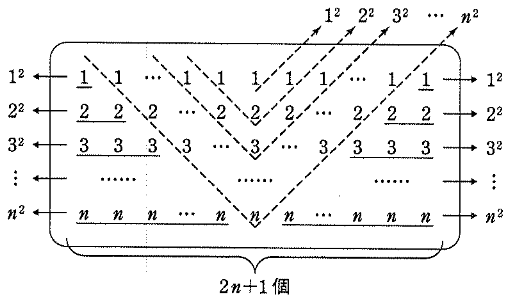
$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ■$$

次に，式変形を少なくするために，図の構成を更に工夫する。

（(☆)の証明（その2））

下の図のように数を並べその総和について考える。



上の図において数の総和は，次のように 2 通りの解釈ができる。

「$\sum_{k=1}^{n} k^2$ が 3 組」　「$\sum_{k=1}^{n} k$ が $(2n+1)$ 組」

よって，$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(2n+1)\sum_{k=1}^{n} k$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ■$$

§3. 証明（その3）

よく知られている 2 項係数の性質を確認しよう。

（補題2） $\sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$

実は，この補題は「連続する自然数の積の和」を統一的にもとめる手法となっている。

（補題2の証明） ${}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r+1}={}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$ より

$$\sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r=\sum_{k=r}^{n} {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}-\sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_{r+1}$$

$$=\sum_{k=r+1}^{n+1} {}_k\mathrm{C}_{r+1}-\sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} \quad ■$$

（本稿では，$n<r$ のとき ${}_n\mathrm{C}_r=0$ と約束する）

この補題を使って，公式(☆)の証明をしてみよう。

((☆)の証明(その3))

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n} k(k-1)+\sum_{k=1}^{n} k$$

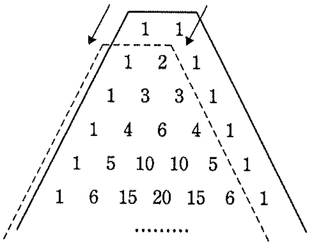
$$=\sum_{k=1}^{n} 2{}_kC_2+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=2{}_{n+1}C_3+\frac{1}{2}n(n+1) \quad (\because \text{ 補題2})$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ■$$

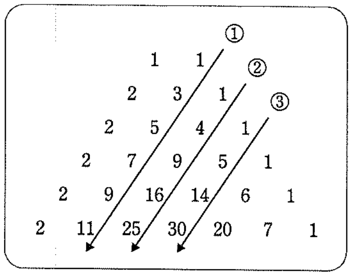
§4.「パスカルの三角形」の変形版の考察

パスカルの三角形を次のように変形すると，本テーマと関連のある数列を構成することができる。



(パスカルの三角形)

パスカルの三角形を図のように左下にずらして自分自身に加えると，次のようになる。



ここで，上の図の①②③のそれぞれの数列について次のことがわかる。

①は，${}_nC_1+{}_{n-1}C_1=2n-1$ となるので**奇数列**

②は，${}_{n+1}C_2+{}_nC_2=n^2$ となるので**平方数の列**

③は，${}_{n+2}C_3+{}_{n+1}C_3=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となるので**平方和の列**

ところで，以上の内容と補題2を使うと次のような関係ができる。これは，(☆)の証明になっている。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n}({}_{k+1}C_2+{}_kC_2)={}_{n+2}C_3+{}_{n+1}C_3$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(東京都　元文教大学付属高等学校)