'08年大学入試の背景を探る

宮川（みやかわ）　幸隆（ゆきたか）

本稿では，'08年度の慶應義塾大学・医学部の入試問題の4番の背景を探ります。

その問題とは次の様なものです。

> 設問(1)，(3)，(4)では，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。（空欄に入れる適切な数または式が複数個ある場合は，それらをすべて答えなさい。） また，設問(2)に答えなさい。
>
> x の多項式 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ を
> $f_0(x)=1$，$f_1(x)=x$，
> $f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$
> により順に定める。
>
> (1) $f_5(x)$ を具体的に求めると $f_5(x)=\boxed{あ}$ であり，方程式 $f_5(x)=0$ を解くと $x=\boxed{い}$ である。
>
> (2) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して
> $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ であることを示しなさい。
>
> (3) (1)と(2)を用いて $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めると $\boxed{う}$ である。
>
> (4) n を3以上の奇数とする。関数 $y=f_n(x)$ $(-1<x<1)$ は極大値 $\boxed{え}$ をとる。この極大値をとる x の値すべてを n を用いた式で表すと $x=\boxed{お}$ である。

初期条件と漸化式から，

$$f_2(x)=2x\cdot x-1=2x^2-1$$

なので，上の漸化式と次の初期条件

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=2x^2-1$$

は $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が**チェビシェフ多項式**であることを示しています[参考文献〔1〕参照]。

よって(2)が成り立つのです。(1)は

$$\boldsymbol{f_5(x)=16x^5-20x^3+5x}$$

と求まり，これから

$$\boldsymbol{x=0,\ \pm\frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}}\ \text{（複号任意）}$$

と求まります。

チェビシェフ多項式の因数分解

$$\boldsymbol{f_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\ (n\geqq1)}$$

から，$\cos\dfrac{\pi}{10}$ は $f_5(x)=0$ の解であり，

$$0<\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{4}\ \text{により}\ 1>\cos\frac{\pi}{10}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $1>\cos^2\dfrac{\pi}{10}>\dfrac{1}{2}$ であり，

$$\frac{10+2\sqrt{5}}{16}>\frac{1}{2}>\frac{10-2\sqrt{5}}{16}\quad \text{とから，(3)は}$$

$$\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

と求まります。

さて，x の $n-1$ 次の多項式 $g_n(x)$ を**第2種チェビシェフ多項式**とすると

$$g_n(\cos\theta)\sin\theta=\sin n\theta$$

であって，

$$\boldsymbol{f_n{}'(x)=ng_n(x)}\ \cdots\cdots①$$

が成り立ちます。――なぜならば，

$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ の両辺を θ で微分すると

$-f_n{}'(\cos\theta)\sin\theta=-n\sin n\theta$，*i.e.*，

$f_n{}'(\cos\theta)\sin\theta=ng_n(\cos\theta)\sin\theta\ \cdots\cdots②$

②が任意の θ に対して成り立つから，②の両辺を $\sin\theta$ で割って $\cos\theta=x$ とおいた

$$f_n{}'(x)=ng_n(x)$$

も成り立つ。

さて，**第2種チェビシェフ多項式の因数分解**

$$g_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{k}{n}\pi\right)\ (n\geqq2)$$

[これもチェビシェフ多項式の因数分解も参考文献〔1〕を参照]と①から，関数 $y=f_n(x)$ の極値を与える x の値は

$$\cos\frac{k}{n}\pi\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots③$$

です。

さて，$g_n(\cos\theta)\sin\theta=\sin n\theta$ の両辺を θ で微分すると，

$$-g_n'(\cos\theta)\sin^2\theta+g_n(\cos\theta)\cos\theta$$
$$=n\cos n\theta,\ i.e.,$$

$$\sin^2\theta g_n'(\cos\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos\theta-n\cos n\theta$$

$$\therefore\quad g_n'(\cos\theta)=\frac{\sin n\theta\cos\theta-n\cos n\theta\sin\theta}{\sin^3\theta}$$

よって①とから，

$$f_n''(\cos\theta)=n\cdot\frac{\sin n\theta\cos\theta-n\cos n\theta\sin\theta}{\sin^3\theta}$$

③から $\theta=\frac{k}{n}\pi\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき，

$\sin n\theta=0$ であるから，$\cos n\theta=\pm1$ となり，

$$f_n''(\cos\theta)=\frac{\mp n^2}{\sin^2\theta}$$

である。これが負となるのは $\cos n\theta=1$ のときであるから，関数 $y=f_n(x)$ の**極大値は1のみ**であり［∵(2)］，極大値を与える x の値は

$$\boldsymbol{x=\cos\frac{2j}{n}\pi\ \left(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{n-1}{2}\right)}\ [\because③]$$

であるという具合に，(4)も求まります。

以上の様に，この入試問題の背景は，チェビシェフ多項式と第2種チェビシェフ多項式の性質だった訳です。

《参考文献》

〔1〕 宮川幸隆，'04年大学入試の背景を探る，
数研通信 数学 No.51，数研出版

〔2〕 雑誌「大学への数学」2008年5月号，
特集2008年大学入試問題，東京出版

(静岡県立静岡中央高等学校)