e, 3, π の関係について

久末(ひさすえ)　正樹(まさき)

§1. はじめに

問題　3^π と π^3 はどちらが大きいか。ただし，$\pi>3$ は利用してよい。〔首都大東京〕

問題　$y=\dfrac{\log x}{x}$ のグラフを利用して $a^b=b^a$，$a<b$ の自然数解を求めよ。〔東京大，岐阜大〕

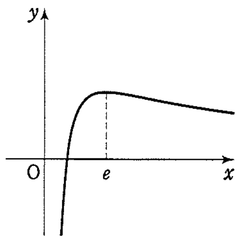
などのように，底と指数を入れ替えた2つの数の大小を比較させる問題が大学入試ではよくあります。

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を考えると，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ であるから $f'(e)=0$ で

$x<e$ のとき $f'(x)>0$ より $y=f(x)$ は単調増加，

$x>e$ のとき $f'(x)<0$ より $y=f(x)$ は単調減少

であるから，$y=f(x)$ は $x=e$ で極大です。



ゆえに　$f(3)>f(\pi)$　すなわち　$\dfrac{\log 3}{3}>\dfrac{\log\pi}{\pi}$，

よって　$\pi\log 3>3\log\pi$　すなわち　$\log 3^\pi>\log\pi^3$

であるから　　$3^\pi>\pi^3$

同様にして，$f(e)>f(\pi)$ や $f(3)>f(e)$ より

$e^\pi>\pi^e$ や $e^3>3^e$ が成り立ちます。

§2. e, 3, π を用いた指数の形の大小

e，3，π を使った指数の形は

$$e^e,\ e^3,\ e^\pi,\ 3^e,\ 3^3,\ 3^\pi,\ \pi^e,\ \pi^3,\ \pi^\pi$$

の9通りありますが，今回，これらの大小関係を決定することができました。

定理　$e^e<3^e<e^3<\pi^e<e^\pi<3^3<\pi^3<3^\pi<\pi^\pi$ が成り立つ。

$3^e<e^3$，$\pi^e<e^\pi$，$\pi^3<3^\pi$ は上述のとおりである。

$e^e<3^e$，$3^3<\pi^3$，$3^\pi<\pi^\pi$ は指数の性質より自明です。以上より，$e^3<\pi^e$ と $e^\pi<3^3$ を証明すれば定理の証明は完成します。

(i)　$e^3<\pi^e$ が成り立つ。

(証明)　$f(x)=x-\log(1+x)$ とおくと，

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ であるから

$x>0$ のとき $f'(x)>0$，$x<0$ のとき $f(x)<0$

であるから $y=f(x)$ は $x=0$ のとき極小かつ最小で，$f(0)=0$ であるから $f(x)\geqq 0$，すなわち $x>-1$ において $\log(1+x)\leqq x$ である。

$-1<1-\dfrac{3}{e}<0$　であるから，$x=1-\dfrac{3}{e}$ とおくと，

$$\frac{3}{e}=1-\left(1-\frac{3}{e}\right)<1-\log\left(1+\left(1-\frac{3}{e}\right)\right)$$
$$=1-\log\frac{2e-3}{e}=\log\frac{e^2}{2e-3}$$

である。一方，$\dfrac{27}{10}<e<\dfrac{11}{4}$ であるから

$$\frac{e^2}{2e-3}=\frac{e}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{4(2e-3)}$$
$$<\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{4}+\frac{1}{2}+\frac{9}{4\left(2\cdot\frac{27}{10}-3\right)}$$
$$=\frac{147}{48}=3.02\cdots<\pi$$

よって $\dfrac{3}{e}<\log\pi$ が成り立つ。すなわち　$3<\log\pi^e$

ゆえに $e^3<\pi^e$ である。(証明終)

(ii)　$e^\pi<3^3$ が成り立つ。

これは2通りの証明ができました。1つ目は e^x のマクローリン展開を利用する証明，2つ目は e^π と 3^3 の間にある数を具体的に提示することにより初等的に証明しました。

(証明1)　$e^\pi<e^{3.15}=e^{\frac{63}{20}}=(e^{\frac{21}{20}})^3$ であるから，$e^{\frac{21}{20}}<3$ を証明すればよい。

$t=\dfrac{21}{20}$ とおくとテイラー展開より

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\cdots$$
$$=1+t+\frac{t^2}{2}\left(1+\frac{t}{3}+\frac{t^2}{3\cdot4}+\frac{t^3}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\right)$$

が成り立つ。ここで,

$$\frac{t}{3}+\frac{t^2}{3\cdot4}+\frac{t^3}{3\cdot4\cdot5}+\cdots<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots \quad \cdots(※)$$

が成り立つことを証明する。第一項と第二項の和に対して,

$$\frac{t}{3}+\frac{t^2}{3\cdot4}=\frac{707}{1600}=\frac{6363}{14400}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}=\frac{4}{9}=\frac{6400}{14400}$$

であり，第 n 項 $(n\geqq3)$ に対して,

$$3t=\frac{63}{20}<4,\quad 3t^2=\frac{1321}{400}<4$$

であるから

$$\frac{t^n}{3\cdot4\cdots(n+2)}=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{3^{n-1}t^n}{4\cdot5\cdots(n+2)}$$
$$=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{3t^2}{4}\cdot\frac{3t}{5}\cdots\frac{3t}{n+2}<\frac{1}{3^n}$$

が成り立つ。よって(※)は成り立つ。ゆえに,

$$e^t<1+t+\frac{t^2}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)$$
$$=1+t+\frac{t^2}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=1+t+\frac{t^2}{2}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=1+\frac{21}{20}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^2\cdot\frac{3}{2}=\frac{4603}{1600}<3$$

よって証明された。(証明１終)

(証明２)　二項定理より

$$9^{20}=(8+1)^{20}>8^{20}+{}_{20}C_1\cdot8^{19}+{}_{20}C_2\cdot8^{18}+{}_{20}C_3\cdot8^{17}$$
$$=8^{20}+20\cdot8^{19}+190\cdot8^{18}+1140\cdot8^{17}$$
$$=\left(1+\frac{20}{8}+\frac{190}{8^2}+\frac{1140}{8^3}\right)\cdot8^{20}$$
$$=\frac{1113}{128}\cdot8^{20}>8\cdot8^{20}=8^{21}$$

が成り立つ。一方,

$8^{21}<9^{20}\Leftrightarrow 2^{63}<3^{40}\Leftrightarrow 2^{3.15}<3^2\Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2}\cdot3.15}<3^3$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{2})^{3.15}<3^3$

であり　$e<2.8<2\sqrt{2}$　より　$e^\pi<(2\sqrt{2})^{3.15}<3^3$

よって証明された。(証明２終)

ちなみに $e^\pi>21$ を証明させる問題が，1999年東京大学前期入試問題に出題されています。

※なお，計算機を使った正しい値は以下のようになります。

$e^e=15.1542622\cdots$

$3^e=19.8129907\cdots$

$e^3=20.0855369\cdots$

$\pi^e=22.4591577\cdots$

$e^\pi=23.1406926\cdots$

$3^3=27$

$\pi^3=31.0062767\cdots$

$3^\pi=31.5442807\cdots$

$\pi^\pi=36.4621596\cdots$

(岐阜県立多治見北高等学校)